

2.1. Теор о непр завис. Нер-во Чаплыгина.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T], \quad (1.1)$$

$$y(t_0) = y_0. \quad (1.2)$$

Пусть функция $f(t, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике

$$Q = \{(t, y) : |t - t_0| \leq T, \quad A \leq y \leq B\}.$$

Определение 1.1.1. Решением задачи Коши (1.1), (1.2) на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ называется функция $y(t)$ такая, что $y(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_0 - T, t_0 + T]$, $A \leq y(t) \leq B$ для $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $y(t)$ удовлетворяет (1.1), (1.2).

Решение задачи Коши (1.1), (1.2) зависит от функции $f(t, y)$ и начального состояния y_0 , которые можно называть исходными данными задачи Коши (1.1), (1.2). Как зависит решение этой задачи от изменения исходных данных, то есть функции $f(t, y)$ и начального состояния y_0 ? Покажем, что небольшие изменения исходных данных приводят к небольшим изменениям решения задачи Коши. Таким образом, можно говорить о непрерывной зависимости решения задачи Коши от исходных данных.

Теорема 1.1.1. Пусть функции $f_1(t, y)$ и $f_2(t, y)$ непрерывны в прямоугольнике Q и $f_1(t, y)$ удовлетворяет в Q условию Липшица по y , то есть существует константа $L > 0$ такая, что

$$|f_1(t, y) - f_1(t, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}|, \quad \forall (t, y), (t, \tilde{y}) \in Q.$$

Тогда, если функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ являются решениями задач Коши

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t)), \\ y_1(t_0) = y_{01}, \end{cases} \quad \begin{cases} y_2'(t) = f_2(t, y_2(t)), \\ y_2(t_0) = y_{02}, \end{cases}$$

то имеет место неравенство

$$\max_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} |y_1(t) - y_2(t)| \leq \left(|y_{01} - y_{02}| + T \max_{(t, y) \in Q} |f_1(t, y) - f_2(t, y)| \right) \exp\{LT\}. \quad (1.3)$$

Доказательство. Из леммы об эквивалентности задачи Коши интегральному уравнению следует, что функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ являются решениями интегральных уравнений

$$y_1(t) = y_{01} + \int_{t_0}^t f_1(\tau, y_1(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T],$$

$$y_2(t) = y_{02} + \int_{t_0}^t f_2(\tau, y_2(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

Вычитая второе уравнение из первого и оценивая по модулю, имеем

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq |y_{01} - y_{02}| + \left| \int_{t_0}^t (f_1(\tau, y_1(\tau)) - f_2(\tau, y_2(\tau))) d\tau \right|.$$

Вычитая и прибавляя под знаком интеграла $f_1(\tau, y_2(\tau))$, получим

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_2(t)| &\leq |y_{01} - y_{02}| + \left| \int_{t_0}^t (f_1(\tau, y_1(\tau)) - f_1(\tau, y_2(\tau))) d\tau \right| + \\ &+ \left| \int_{t_0}^t (f_1(\tau, y_2(\tau)) - f_2(\tau, y_2(\tau))) d\tau \right|, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Учитывая то, что функция $f_1(t, y)$ удовлетворяет условию Липшица, а также оценку

$$\left| \int_{t_0}^t (f_1(\tau, y_2(\tau)) - f_2(\tau, y_2(\tau))) d\tau \right| \leq T \max_{(t, y) \in Q} |f_1(t, y) - f_2(t, y)|,$$

справедливую для всех $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, неравенство (1.4) можно переписать так:

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_2(t)| &\leq (|y_{01} - y_{02}| + T \max_{(t, y) \in Q} |f_1(t, y) - f_2(t, y)|) + \\ &+ L \left| \int_{t_0}^t |y_1(\tau) - y_2(\tau)| d\tau \right|, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T]. \end{aligned}$$

Применив к функции $|y_1(t) - y_2(t)|$ лемму Гроуполла-Беллмана ??, при $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ получим неравенство

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq (|y_{01} - y_{02}| + T \max_{(t, y) \in Q} |f_1(t, y) - f_2(t, y)|) \exp\{L|t - t_0|\},$$

из которого следует оценка (1.3). Теорема 1.1.1 доказана. $\square$

Далее мы используем следующее простое утверждение из математического анализа, представляющее собой формулу конечных приращений в интегральном виде.

Лемма 1.1.1. Пусть функция $f(t, y)$ непрерывна в Q_+ и имеет в Q_+ непрерывную частную производную $f_y(t, y)$. Тогда для любых $(t, y_1), (t, y_2) \in Q_+$ справедливо равенство

$$f(t, y_1) - f(t, y_2) = \int_0^1 f_y(t, y_2 + \theta(y_1 - y_2)) d\theta (y_1 - y_2). \quad (1.5)$$

2.2. Теор о непр завис ... и правой части.

$$Q_\mu = \{(t, y, \mu) : |t - t_0| \leq T, \quad A \leq y \leq B, \quad \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2\}.$$

Пусть функция $f(t, y, \mu)$ определена на множестве Q_μ , а функция $y_0(\mu)$ определена на отрезке $[\mu_1, \mu_2]$.

Рассмотрим задачу Коши

$$y'(t) = f(t, y(t), \mu), \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T], \quad (1.7)$$

$$y(t_0) = y_0(\mu). \quad (1.8)$$

Теорема 1.2.1. Пусть функция $f(t, y, \mu)$ непрерывна в Q_μ и удовлетворяет в Q_μ условию Липшица по y , то есть

$$|f(t, y_1, \mu) - f(t, y_2, \mu)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall (t, y_1, \mu), (t, y_2, \mu) \in Q_\mu,$$

а функция $y_0(\mu)$ непрерывна на отрезке $[\mu_1, \mu_2]$.

Тогда, если $y(t, \mu)$ – решение задачи Коши (1.7), (1.8) на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ для всех $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$, то функция $y(t, \mu)$ непрерывна по μ при $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$.

Доказательство. По условию решение задачи Коши $y(t, \mu)$ существует для всех $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ и $A \leq y(t, \mu) \leq B$ для всех $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$. Пусть μ_0 и $\mu_0 + \Delta\mu$ две произвольные точки отрезка $[\mu_1, \mu_2]$. Рассмотрим решения задачи Коши $y(t, \mu_0)$ и $y(t, \mu_0 + \Delta\mu)$, соответствующие этим значениям параметров. Введем обозначения

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y(t, \mu_0), & y_2(t) &= y(t, \mu_0 + \Delta\mu), \\ f_1(t, y) &= f(t, y, \mu_0), & f_2(t, y) &= f(t, y, \mu_0 + \Delta\mu), \\ y_{01} &= y_0(\mu_0), & y_{02} &= y_0(\mu_0 + \Delta\mu). \end{aligned}$$

Для функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$ выполнены условия теоремы 1.1.1 о непрерывной зависимости решения задачи Коши от исходных данных. Применяя эту теорему, получим

$$\begin{aligned} \max_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} |y(t, \mu_0) - y(t, \mu_0 + \Delta\mu)| &= \max_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} |y_1(t) - y_2(t)| \leq \\ &\leq (|y_{01} - y_{02}| + T \max_{(t, y) \in Q} |f_1(t, y) - f_2(t, y)|) \exp\{LT\} = \\ &= (|y_0(\mu_0) - y_0(\mu_0 + \Delta\mu)| + \\ &+ T \max_{(t, y) \in Q} |f(t, y, \mu_0) - f(t, y, \mu_0 + \Delta\mu)|) \exp\{LT\}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $Q = \{(t, y) : |t - t_0| \leq T, \quad A \leq y \leq B\}$.

Покажем, что из неравенства (1.9) следует непрерывность функции $y(t, \mu)$ в точке μ_0 . Пусть ε – произвольное положительное число. Покажем, что найдется $\delta(\varepsilon)$ такое, что для всех $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$

$$|y(t, \mu_0 + \Delta\mu) - y(t, \mu_0)| \leq \varepsilon \quad (1.10)$$

при $|\Delta\mu| \leq \delta(\varepsilon)$.

Так как непрерывная на отрезке $[\mu_1, \mu_2]$ функция $y_0(\mu)$ равномерно непрерывна на этом отрезке, то существует $\delta_1(\varepsilon)$ такое, что

$$|y_0(\mu_0 + \Delta\mu) - y_0(\mu_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2 \exp\{LT\}} \quad (1.11)$$

при $|\Delta\mu| \leq \delta_1(\varepsilon)$.

Так как непрерывная на ограниченном замкнутом множестве Q_μ функция $f(t, y, \mu)$ равномерно непрерывна на этом множестве, то существует $\delta_2(\varepsilon)$ такое, что для любых $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ и $y \in [A, B]$

$$|f(t, y, \mu_0 + \Delta\mu) - f(t, y, \mu_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2T \exp\{LT\}} \quad (1.12)$$

при $|\Delta\mu| \leq \delta_2(\varepsilon)$.

Из неравенств (1.9), (1.11) и (1.12) следует, что при $|\Delta\mu| \leq \delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$ справедливо неравенство (1.10), которое означает непрерывность функции $y(t, \mu)$ по μ . Теорема 1.2.1 доказана. $\square$

Замечание 1.2.1. В теореме 1.2.1 фактически доказана равномерная на множестве $[t_0 - T, t_0 + T] \times [\mu_1, \mu_2]$ непрерывность решения задачи Коши по параметру μ . Отсюда нетрудно показать, что функция $y(t, \mu)$ непрерывна по совокупности переменных (t, μ) на множестве $[t_0 - T, t_0 + T] \times [\mu_1, \mu_2]$.

2.3. Теор о дифф по параметру Коши.

$$f(t, y_1) - f(t, y_2) = \int_0^1 f_y(t, y_2 + \theta(y_1 - y_2)) d\theta (y_1 - y_2). \quad (1.5)$$

Теорема 1.2.2. Пусть функция $f(t, y, \mu)$ непрерывна в Q_μ и имеет в Q_μ непрерывные частные производные $f_y(t, y, \mu)$, $f_\mu(t, y, \mu)$, а функция $y_0(\mu)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\mu_1, \mu_2]$.

Тогда, если $y(t, \mu)$ – решение задачи Коши (1.7), (1.8) на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ для всех $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$, то функция $y(t, \mu)$ имеет при $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ производную по μ .

Доказательство. По условию решение задачи Коши $y(t, \mu)$ существует для всех $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ и $A \leq y(t, \mu) \leq B$ для всех $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$. Пусть μ и $\mu + \Delta\mu$ две произвольные точки отрезка $[\mu_1, \mu_2]$. Рассмотрим соответствующие этим параметрам решения задачи Коши $y(t, \mu)$ и $y(t, \mu + \Delta\mu)$. Определим функцию

$$v(t, \mu, \Delta\mu) = \frac{y(t, \mu + \Delta\mu) - y(t, \mu)}{\Delta\mu}, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

Так как функции $y(t, \mu + \Delta\mu)$, $y(t, \mu)$ являются решениями уравнения (1.7) на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ при соответствующих значениях параметров, то

$$v'(t, \mu, \Delta\mu) = \frac{f(t, y(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, y(t, \mu), \mu)}{\Delta\mu}. \quad (1.13)$$

Преобразуем выражение, стоящее в правой части этого равенства

$$\begin{aligned} \frac{f(t, y(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, y(t, \mu), \mu)}{\Delta\mu} &= \\ &= \frac{f(t, y(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, y(t, \mu), \mu + \Delta\mu)}{\Delta\mu} + \\ &+ \frac{f(t, y(t, \mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, y(t, \mu), \mu)}{\Delta\mu}. \end{aligned}$$

Применяя формулу конечных приращений (1.5), получим

$$\begin{aligned} \frac{f(t, y(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, y(t, \mu), \mu + \Delta\mu)}{\Delta\mu} &= \\ &= \int_0^1 f_y(t, y(t, \mu) + \theta(y(t, \mu + \Delta\mu) - y(t, \mu)), \mu + \Delta\mu) d\theta \frac{y(t, \mu + \Delta\mu) - y(t, \mu)}{\Delta\mu}. \end{aligned}$$

Введем функции

$$p(t, \mu, \Delta\mu) = \int_0^1 f_y(t, y(t, \mu) + \theta(y(t, \mu + \Delta\mu) - y(t, \mu)), \mu + \Delta\mu) d\theta,$$

$$q(t, \mu, \Delta\mu) = \frac{f(t, y(t, \mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, y(t, \mu), \mu)}{\Delta\mu}.$$

Учитывая сделанные обозначения, имеем

$$\begin{aligned} \frac{f(t, y(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, y(t, \mu), \mu)}{\Delta\mu} &= \\ &= p(t, \mu, \Delta\mu)v(t, \mu, \Delta\mu) + q(t, \mu, \Delta\mu). \end{aligned}$$

Подставляя это равенство в правую часть (1.13), получим, что функция $v(t, \mu, \mu + \Delta\mu)$ является решением линейного дифференциального уравнения первого порядка на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$:

$$v'(t, \mu, \Delta\mu) = p(t, \mu, \Delta\mu)v(t, \mu, \Delta\mu) + q(t, \mu, \Delta\mu). \quad (1.14)$$

Из определения $v(t, \mu, \Delta\mu)$ следует, что она удовлетворяет начальному условию

$$v(t_0, \mu, \Delta\mu) = \frac{y_0(\mu + \Delta\mu) - y_0(\mu)}{\Delta\mu}. \quad (1.15)$$

Решение задачи Коши (1.14), (1.15) имеет вид

$$\begin{aligned} v(t, \mu, \Delta\mu) &= \frac{y_0(\mu + \Delta\mu) - y_0(\mu)}{\Delta\mu} \exp\left\{ \int_{t_0}^t p(\xi, \mu, \Delta\mu) d\xi \right\} + \\ &+ \int_{t_0}^t q(\tau, \mu, \Delta\mu) \exp\left\{ \int_{t_0}^t p(\xi, \mu, \Delta\mu) d\xi \right\} d\tau, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T]. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Для доказательства существования производной $\frac{\partial y}{\partial \mu}(t, \mu)$ достаточно доказать, что функция $v(t, \mu, \Delta\mu)$ имеет предел при $\Delta\mu \rightarrow 0$. Покажем, что существует предел правой части формулы (1.16) при $\Delta\mu \rightarrow 0$.

Так как функция $y_0(\mu)$ непрерывно дифференцируема, то

$$\lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} \frac{y_0(\mu + \Delta\mu) - y_0(\mu)}{\Delta\mu} = \frac{dy_0}{d\mu}(\mu).$$

Найдем предел функции $p(t, \mu, \Delta\mu)$ при $\Delta\mu \rightarrow 0$. Из непрерывности в Q_μ частной производной $f_y(t, y, \mu)$ и определения функции $p(t, \mu, \Delta\mu)$ следует, что

$$\lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} p(t, \mu, \Delta\mu) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t, \mu), \mu)$$

равномерно по $(t, \mu) \in [t_0 - T, t_0 + T] \times [\mu_1, \mu_2]$. Из существования частной производной $f_\mu(t, y, \mu)$ имеем

$$\lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} q(t, \mu, \Delta\mu) = \frac{\partial f}{\partial \mu}(t, y(t, \mu), \mu)$$

равномерно по $(t, \mu) \in [t_0 - T, t_0 + T] \times [\mu_1, \mu_2]$. Следовательно, предел правой части формулы (1.16) существует, и переходя в этой формуле к пределу при $\Delta\mu \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \mu}(t, \mu) &= \lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} v(t, \mu, \Delta\mu) = \frac{dy_0}{d\mu}(\mu) \exp\left\{ \int_{t_0}^t f_y(\xi, y(\xi, \mu), \mu) d\xi \right\} + \\ &+ \int_{t_0}^t f_\mu(\tau, y(\tau, \mu), \mu) \exp\left\{ \int_{t_0}^t f_y(\xi, y(\xi, \mu), \mu) d\xi \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Теорема 1.2.2 доказана. $\square$

Теорема 1.1.2. (Теорема сравнения) Пусть функции $f_1(t, y), f_2(t, y)$ непрерывны в Q_+ и $f_1(t, y)$ имеет в Q_+ непрерывную частную производную $\frac{\partial f_1}{\partial y}(t, y)$. Тогда, если функции $y_1(t), y_2(t)$ на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ являются решениями задач Коши

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t)), \\ y_1(t_0) = y_{01}, \end{cases} \quad \begin{cases} y_2'(t) = f_2(t, y_2(t)), \\ y_2(t_0) = y_{02}, \end{cases}$$

причем

$$f_1(t, y) \geq f_2(t, y), \quad (t, y) \in Q_+, \quad y_{01} \geq y_{02},$$

то справедливо неравенство

$$y_1(t) \geq y_2(t), \quad t \in [t_0, t_0 + T].$$

Доказательство. Так как функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ являются решениями соответствующих уравнений, то они непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_0, t_0 + T]$, $A \leq y_i(t) \leq B$, $i = 1, 2$, и справедливо равенство

$$y_1'(t) - y_2'(t) = f_1(t, y_1(t)) - f_2(t, y_2(t)), \quad t \in [t_0, t_0 + T]. \quad (1.6)$$

Преобразуем правую часть этого равенства, используя формулу конечных приращений (1.5),

$$\begin{aligned} & f_1(t, y_1(t)) - f_2(t, y_2(t)) = \\ & = f_1(t, y_1(t)) - f_1(t, y_2(t)) + f_1(t, y_2(t)) - f_2(t, y_2(t)) = \\ & = \int_0^1 \frac{\partial f_1}{\partial y}(t, y_2(t) + \theta(y_1(t) - y_2(t))) d\theta (y_1(t) - y_2(t)) + \\ & \quad + f_1(t, y_2(t)) - f_2(t, y_2(t)). \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} v(t) &= y_1(t) - y_2(t), \\ p(t) &= \int_0^1 \frac{\partial f_1}{\partial y}(t, y_2(t) + \theta(y_1(t) - y_2(t))) d\theta, \\ h(t) &= f_1(t, y_2(t)) - f_2(t, y_2(t)). \end{aligned}$$

Тогда $f_1(t, y_1(t)) - f_2(t, y_2(t)) = p(t)v(t) + h(t)$, и равенство (1.6) можно переписать так:

$$v'(t) = p(t)v(t) + h(t), \quad t \in [t_0, t_0 + T].$$

Решение этого линейного дифференциального уравнения первого порядка с начальным условием $v(t_0) = y_{01} - y_{02}$ имеет вид

$$v(t) = (y_{01} - y_{02}) \exp\left\{\int_{t_0}^t p(\xi) d\xi\right\} + \int_{t_0}^t \exp\left\{\int_{\tau}^t p(\xi) d\xi\right\} h(\tau) d\tau, \quad t \in [t_0, t_0 + T].$$

Так как из условий теоремы следует, что

$$y_{01} - y_{02} \geq 0, \quad h(t) \geq 0, \quad t \in [t_0, t_0 + T],$$

то

$$v(t) = y_1(t) - y_2(t) \geq 0, \quad t \in [t_0, t_0 + T],$$

и теорема 1.1.2 доказана. $\square$

2.4. Основные понятия теор уст по Ляпунову.

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка относительно искомой вектор функции $\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T$

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = \vec{f}(t, \vec{y}(t)), \quad (2.1)$$

$$\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0, \quad (2.2)$$

где

$$\vec{f}(t, \vec{y}) = (f_1(t, \vec{y}), f_2(t, \vec{y}), \dots, f_n(t, \vec{y}))^T, \quad \vec{y}_0 = (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})^T.$$

Предполагается, что $f_i(t, \vec{y})$ определены и непрерывны вместе с частными производными $\partial f_i(t, \vec{y})/\partial y_j$ на множестве

$$D = [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$$

для всех $i, j = 1, 2, \dots, n$. Тогда по теореме ?? о существовании и единственности решения задачи Коши для любых начальных данных $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ система (2.1), (2.2) имеет на некотором отрезке $[0, T]$ единственное решение $\vec{y}(t; \vec{y}_0)$, в обозначении которого отражена зависимость от начального состояния $\vec{y}_0$. Если же в начальном условии (2.2) берутся начальные данные $\vec{y}_0$, то соответствующее решение обозначается как $\vec{y}(t; \vec{y}_0)$. Всюду ниже $\|\vec{y}\| = \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{1/2}$ обозначает евклидову норму вектора $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

Определение 2.1.1. Решение $\vec{y}(t; \vec{y}_0)$ задачи Коши (2.1), (2.2) называется **устойчивым по Ляпунову**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon, \vec{y}_0) > 0$ такое, что для любых начальных данных $\vec{y}_0$, удовлетворяющих условию $\|\vec{y}_0 - \vec{y}_0\| < \delta(\varepsilon, \vec{y}_0)$, соответствующие решения $\vec{y}(t; \vec{y}_0)$ задачи Коши для системы (2.1) существуют для всех $t \geq 0$ и удовлетворяют неравенству

$$\|\vec{y}(t; \vec{y}_0) - \vec{y}(t; \vec{y}_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, +\infty). \quad (2.3)$$

В противном случае решение $\vec{y}(t; \vec{y}_0)$ называется **неустойчивым по Ляпунову**.

Заметим, что неравенство (2.3) должно быть выполнено сразу для всех $t \geq 0$, поэтому вместо (2.3) можно использовать также неравенство

$$\sup_{t \geq 0} \|\vec{y}(t; \vec{y}_0) - \vec{y}(t; \vec{y}_0)\| < \varepsilon.$$

Определение 2.1.2. Решение $\vec{y}(t; \vec{y}_0)$ задачи Коши (2.1), (2.2) называется **асимптотически устойчивым**, если оно устойчиво по Ляпунову и существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любых начальных данных $\vec{y}_0$, удовлетворяющих условию $\|\vec{y}_0 - \vec{y}_0\| < \delta_0$, существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\vec{y}(t; \vec{y}_0) - \vec{y}(t; \vec{y}_0)\| = 0. \quad (2.4)$$

Определение 2.1.3. Нулевое решение $\vec{y}(t; \vec{0}) = \vec{0}$ задачи Коши (2.1), (2.2) называется **устойчивым по Ляпунову**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых начальных данных $\vec{y}_0$, удовлетворяющих условию $\|\vec{y}_0\| < \delta(\varepsilon)$, соответствующие решения $\vec{y}(t; \vec{y}_0)$ задачи Коши для системы (2.1) существуют для всех $t \geq 0$ и

$$\|\vec{y}(t; \vec{y}_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, +\infty). \quad (2.5)$$

В противном случае нулевое решение называется **неустойчивым по Ляпунову**.

Определение 2.1.4. Нулевое решение $\vec{y}(t) = \vec{0}$ задачи Коши (2.1), (2.2) называется **асимптотически устойчивым**, если оно устойчиво по Ляпунову и существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любых начальных данных $\vec{y}_0$, удовлетворяющих условию $\|\vec{y}_0\| < \delta_0$, существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\vec{y}(t; \vec{y}_0)\| = 0. \quad (2.6)$$

Лемма 2.2.1. Пусть $B(t) = (b_{ij}(t))$ - функциональная матрица, элементы которой мажорированы одной и той же функцией $b(t)$:

$$|b_{ij}(t)| \leq b(t), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Если вектор-функции $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$, $\vec{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$ связаны соотношением $\vec{y}(t) = B(t)\vec{x}(t)$, то справедлива оценка

$$\|\vec{y}(t)\| \leq n b(t) \|\vec{x}(t)\|.$$

Лемма 2.2.2. Для любой непрерывной при $t \geq 0$ вектор-функции $\vec{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$ справедливо неравенство

$$\left\| \int_0^t \vec{y}(\xi) d\xi \right\| \leq \sqrt{n} \int_0^t \|\vec{y}(\xi)\| d\xi.$$

Лемма 2.2.3. Пусть $Y(t)$ - фундаментальная матрица линейной однородной системы $d\vec{y}/dt = A\vec{y}$ с постоянными коэффициентами $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, n$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - собственные значения матрицы A с учетом кратностей, $p = \max_{k=1, \dots, n} \operatorname{Re} \lambda_k$.

Тогда для матрицанта $Z(t, \tau) = Y(t)Y^{-1}(\tau)$ справедливо соотношение

- $Z(t, \tau) = Z(t - \tau, 0)$;
- для любого $\gamma > 0$ найдется $C_\gamma > 0$ такое, что справедливо неравенство

$$|Z_{ij}(t, \tau)| \leq C_\gamma \exp\{(p + \gamma)(t - \tau)\}, \quad \forall t \geq \tau.$$

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}, \quad (2.8)$$

где $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, n$. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - собственные значения матрицы A с учетом их кратностей.

Теорема 2.2.1. Пусть вещественные части всех собственных значений матрицы A отрицательны:

$$\operatorname{Re} \lambda_k < 0, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Тогда нулевое решение $\vec{y}(t; \vec{0}) = \vec{0}$ системы (2.8) является асимптотически устойчивым.

Доказательство. Пусть $\vec{y}(t) = \vec{y}(t; \vec{y}_0)$ - решение задачи Коши

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}, \quad \vec{y}(0) = \vec{y}_0.$$

Тогда, используя определение матрицанта, решение этой задачи можно представить в виде

$$\vec{y}(t) = Z(t, 0)\vec{y}_0. \quad (2.9)$$

2.5. Теор об уст одност сист ОДУ с пост коэф.

Теорема 2.2.2. Пусть вещественные части всех собственных значений матрицы A неположительны,

$$\operatorname{Re} \lambda_k \leq 0, \quad \forall k = 1, \dots, n$$

и существуют собственные значения с нулевой вещественной частью, причем размерность каждого собственного подпространства отвечающего $\operatorname{Re} \lambda = 0$, совпадает с его кратностью.

Тогда нулевое решение $\vec{y}(t; \vec{0}) = \vec{0}$ системы (2.8) является устойчивым по Ляпунову, но не асимптотически.

Доказательство. Уточним зависимость матрицанта

$$Z(t, 0) = Y(t)Y^{-1}(0)$$

от переменной $t \geq 0$ в рассматриваемом случае. Для всех элементов $Y_{ij}(t)$ фундаментальной матрицы, отвечающих собственным значениям с отрицательной вещественной частью, аналогично теореме 2.2.1, справедлива оценка

$$|Y_{ij}(t)| \leq C_{ij} \exp\{\alpha t\}, \quad \forall t \geq 0,$$

где C_{ij} - постоянные, $\alpha < 0$. Следовательно,

$$|Y_{ij}(t)| \leq C_{ij}, \quad \forall t \geq 0.$$

По условию теоремы, элементы $Y_{ki}(t)$ фундаментальной матрицы, отвечающие собственным значениям $\lambda = iq$ с нулевой вещественной частью, являются компонентами вектор-функций из фундаментальной системы решений вида

$$\vec{y}(t) = \vec{h}_i \exp\{i\lambda t\},$$

где $\vec{h} = (h_{1i}, \dots, h_{ni})^T$ - собственный вектор (присоединенные векторы для таких собственных значений отсутствуют). Очевидно, что и в этом случае элементы фундаментальной матрицы также ограничены:

$$|Y_{ki}(t)| = |h_{ki}| \cdot |\exp\{iqt\}| \leq C_{ki}, \quad \forall t \geq 0.$$

Таким образом, все элементы фундаментальной матрицы $Y(t)$ ограничены. Умножение $Y(t)$ на постоянную матрицу $Y^{-1}(0)$ оставляет коэффициенты произведения матриц ограниченными. Следовательно,

$$|Z_{ij}(t, 0)| \leq C_{ij}, \quad \forall t \geq 0.$$

Тогда из представления решения (2.9) в силу леммы 2.2.1 с матрицей $B(t) = Z(t, 0)$, функцией $b(t) = \bar{C} = \max_{i,j=1, \dots, n} C_{ij}$ и $\vec{y}(t) = \vec{y}_0$ имеет место оценка

$$\|\vec{y}(t)\| \leq n \bar{C} \|\vec{y}_0\|.$$

Из этой оценки следует устойчивость нулевого решения.

Докажем отсутствие асимптотической устойчивости. Пусть $\vec{h} \in \mathbb{C}^n$ - какой-либо собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = iq$, $q > 0$. Без ограничения общности можем считать, что $\|\vec{h}\| = 1$. Вектор-функция

$$\vec{y}(t) = 0.5\delta_0 \operatorname{Re} \vec{h} \exp\{iqt\}, \quad \delta_0 > 0,$$

является решением системы (2.8) как вещественная часть комплексного решения $\vec{h} \exp\{iqt\}$. В начальный момент $t = 0$ имеем

$$\vec{y}(0) = 0.5\delta_0 \operatorname{Re} \vec{h}, \quad \|\vec{y}(0)\| \leq 0.5\delta_0 \|\vec{h}\| = 0.5\delta_0.$$

Для любого $\delta_0 > 0$ из δ_0 -окрестности нулевого решения стартует построенное выше решение $\vec{y}(t)$, но $\vec{y}(t) \not\rightarrow \vec{0}$ при $t \rightarrow +\infty$, поскольку, например, $\vec{y}(t_k) = 0.5\delta_0 \operatorname{Re} \vec{h} \neq \vec{0}$ при $t_k = 2\pi k/q$, $k \in \mathbb{N}$. Более простой случай $q = 0$ рассматривается аналогично. $\square$

Теорема 2.2.3. Пусть выполнено хотя бы одно из условий:

- матрица A имеет собственное значение с положительной вещественной частью;
- матрица A имеет собственное значение λ_m такое, что

$$\operatorname{Re} \lambda_m = 0,$$

причем размерность собственного подпространства, отвечающего λ_m , меньше кратности этого собственного значения.

Тогда нулевое решение $\vec{y}(t; \vec{0}) = \vec{0}$ неустойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Пусть у матрицы A имеется собственное значение $\lambda = p + iq$, где $p > 0$, $q > 0$. Обозначим через $\vec{h} = \vec{h}_R + i\vec{h}_I$ соответствующий собственный вектор, где $\vec{h}_R$, $\vec{h}_I$ - линейно независимые векторы из $\mathbb{R}^n$. Без ограничения общности можем считать, что $\|\vec{h}\| = 1$. Вектор-функция

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= 0.5\delta \operatorname{Re} \vec{h} \exp\{(p + iq)t\} = \\ &= 0.5\delta \exp\{pt\} (\vec{h}_R \cos qt - \vec{h}_I \sin qt), \quad \delta > 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

является решением системы (2.8) как вещественная часть комплексного решения $\vec{h} \exp\{(p + iq)t\}$. В начальный момент $t = 0$ имеем

$$\vec{y}(0) = 0.5\delta \vec{h}_R, \quad \|\vec{y}(0)\| \leq 0.5\delta \|\vec{h}\| = 0.5\delta.$$

Для любого $\delta > 0$ из δ -окрестности нулевого решения стартует построенное в (2.10) решение $\vec{y}(t)$, для которого при $t = t_k = 2\pi k/q$, $k \in \mathbb{N}$, $t \rightarrow +\infty$ имеем:

$$\vec{y}(t_k) = 0.5\delta \vec{h}_R \exp\{2\pi k p/q\}, \quad \|\vec{y}(t_k)\| = 0.5\delta \|\vec{h}_R\| \exp\{2\pi k p/q\} \rightarrow +\infty.$$

Более простой случай $q = 0$ рассматривается аналогично.

Если у матрицы A имеется собственное значение $\lambda = iq$, $q > 0$, кратность которого превосходит размерность собственного подпространства, то для любого $\delta > 0$ существует решение системы (2.8) вида

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= 0.5\delta \operatorname{Re} (\vec{g} + i\vec{h}) \exp\{iqt\} = \\ &= 0.5\delta ((\vec{g}_R + i\vec{h}_R) \cos qt - (\vec{g}_I + i\vec{h}_I) \sin qt), \quad \delta > 0, \\ \vec{y}(0) &= 0.5\delta \operatorname{Re} \vec{g}, \quad \|\vec{y}(0)\| \leq 0.5\delta, \end{aligned}$$

где $\vec{h} = \vec{h}_R + i\vec{h}_I$ - собственный вектор, $\vec{g} = \vec{g}_R + i\vec{g}_I$ - присоединенный вектор, $\|\vec{g}\| = 1$. Построенное решение $\vec{y}(t)$ стартует при $t = 0$ из δ -окрестности нулевого решения, а при $t = t_k = 2\pi k/q$, $k \in \mathbb{N}$, $k \rightarrow +\infty$ имеем:

$$\vec{y}(t_k) = 0.5\delta (\vec{g}_R + t_k \vec{h}_R), \quad \|\vec{y}(t_k)\| \sim k \|\vec{h}_R\| \rightarrow +\infty.$$

Более простой случай $q = 0$ рассматривается аналогично. $\square$

2.6. Теор об исслед уст по первому приближ.

Теорема 2.3.1. Пусть функции $f_j(\vec{y})$ дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности начала координат, $j = 1, \dots, n$.

Если все собственные значения матрицы $A = (\partial f_i(0, \dots, 0)/\partial y_j)$ имеют отрицательные вещественные части:

$$\operatorname{Re} \lambda_k < 0, \quad \forall k = 1, \dots, n,$$

то нулевое решение системы (2.11) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Если же найдется хотя бы одно собственное значение матрицы $A = (\partial f_i(0, \dots, 0)/\partial y_j)$ с положительной вещественной частью:

$$\exists \lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} : \operatorname{Re} \lambda > 0,$$

то нулевое решение неустойчиво по Ляпунову.

Пример 2.3.1. Исследуем устойчивость решения $(0, 0)$ системы

$$\begin{cases} dy_1/dt = -y_1 - ay_2 + y_2^4, \\ dy_2/dt = y_1 - y_1^2 + y_2^2. \end{cases}$$

Имеем $f_1(y_1, y_2) = -y_1 - ay_2 + y_2^4$, $f_2(y_1, y_2) = y_1 - y_1^2 + y_2^2$,

$$A = \begin{pmatrix} \partial f_1(0, 0) / \partial y_1 & \partial f_1(0, 0) / \partial y_2 \\ \partial f_2(0, 0) / \partial y_1 & \partial f_2(0, 0) / \partial y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения собственных значений матрицы A составим характеристический многочлен

$$M(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -a \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + a.$$

Тогда собственные значения $\lambda_{1,2} = 0.5(-1 \pm \sqrt{1 - 4a})$.

При $a > 0$ имеем $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$. При $a = 0$ имеем $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$. При $a < 0$ имеем $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$. Таким образом, согласно первому методу Ляпунова, нулевое решение асимптотически устойчиво при $a > 0$, неустойчиво при $a < 0$. При $a = 0$ первый метод Ляпунова неприменим.

Обозначим $p = \max_{k=1, \dots, n} \operatorname{Re} \lambda_k < 0$. Выберем и зафиксируем настолько малое $\gamma > 0$, чтобы

$$\alpha = p + \gamma < 0.$$

Тогда согласно части 2 леммы 2.2.3 найдется константа C_γ такая, что справедлива оценка

$$|Z_{ij}(t, 0)| \leq C_\gamma \exp\{\alpha t\}, \quad t \geq 0.$$

В силу леммы 2.2.1 с $B(t) = Z(t, 0)$, $b(t) = C_\gamma \exp\{\alpha t\}$ и $\overline{x}(t) = \overline{y}_0$ из (2.9) следует оценка

$$\|\overline{y}(t)\| \leq nC_\gamma \exp\{\alpha t\} \|\overline{y}_0\|.$$

Если положить $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2nC_\gamma}$, то из неравенства $\|\overline{y}_0\| < \delta(\varepsilon)$ будет вытекать неравенство $\|\overline{y}(t)\| < \varepsilon$ для всех $t \geq 0$. Асимптотическая устойчивость следует из предельного соотношения $\exp\{\alpha t\} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. $\square$

2.7. Исслед уст на основе ф-ций Ляпунова.

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = \vec{f}(t, \vec{y}(t)), \quad \vec{y}(0) = \vec{y}_0 \in \Omega, \quad (2.19)$$

где $\vec{f}(t, \vec{y}) = (f_1(t, y_1, \dots, y_n), f_2(t, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(t, y_1, \dots, y_n))^T$, компоненты $f_j(t, y_1, \dots, y_n)$ определены и непрерывны на множестве $[0; +\infty) \times \Omega$,

причем

$$f_j(t, 0, \dots, 0) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad t \geq 0.$$

Ясно, что система (2.19) имеет нулевое решение $\vec{y}(t; \vec{0}) = \vec{0}$.

Определение 2.4.2. Непрерывно дифференцируемая и положительно определенная на Ω функция $V(\vec{y})$ называется **функцией Ляпунова** системы (2.19), если

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial V(\vec{y})}{\partial y_j} f_j(t, \vec{y}) \leq 0, \quad \forall \vec{y} \in \Omega, \quad t \geq 0. \quad (2.20)$$

Теорема 2.4.1. Пусть на множестве Ω существует функция Ляпунова для системы (2.19). Тогда нулевое решение $\vec{y}(t; \vec{0}) = \vec{0}$ системы (2.19) является устойчивым по Ляпунову.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon_1 \in (0, R)$. В силу леммы 2.4.1 найдем $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon_1)$ такое, что как только для $\vec{y} \in \Omega$ выполнено неравенство $\|\vec{y}\| \geq \varepsilon_1$, то

$$V(\vec{y}) \geq \varepsilon_2. \quad (2.21)$$

В силу непрерывности функции $V(\vec{y})$ в нуле для $\varepsilon_2(\varepsilon_1)$ найдем $\delta = \delta(\varepsilon_2(\varepsilon_1))$ такое, что из неравенства $\|\vec{y}\| < \delta$ вытекает оценка

$$V(\vec{y}) \leq \frac{\varepsilon_2}{2}. \quad (2.22)$$

Без ограничения общности можно считать, что $\delta \leq \varepsilon_1$.

Рассмотрим произвольную начальную точку $\vec{y}_0$ из δ -окрестности нулевого решения ($\|\vec{y}_0\| < \delta$) и покажем, что при $t \geq 0$ соответствующее решение $\vec{y}(t) = \vec{y}(t; \vec{y}_0)$ системы (2.19) удовлетворяет неравенству

$$\|\vec{y}(t)\| < \varepsilon_1.$$

При $t = 0$ это неравенство выполнено, $\|\vec{y}(0)\| = \|\vec{y}_0\| < \delta \leq \varepsilon_1$, и в силу (2.22) имеем

$$V(\vec{y}(0)) \leq \frac{\varepsilon_2}{2}. \quad (2.23)$$

В силу непрерывности неравенство $\|\vec{y}(t)\| < \varepsilon_1$ остается справедливым на некотором полуинтервале $t \in [0; t_1]$. Если $t_1 = +\infty$, то устойчивость доказана. Если же для некоторого момента $t_1 \in (0, +\infty)$ окажется выполненным противоположное неравенство,

$$\|\vec{y}(t_1)\| \geq \varepsilon_1,$$

то в силу (2.21) получаем (см. рис. 2.4)

$$V(\vec{y}(t_1)) \geq \varepsilon_2.$$

Принимая во внимание неравенство (2.23), имеем

$$V(\vec{y}(t_1)) - V(\vec{y}(0)) \geq \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2}{2} = \frac{\varepsilon_2}{2} > 0. \quad (2.24)$$

С другой стороны, в силу (2.20)

$$\frac{dV(\vec{y}(t))}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V(\vec{y}(t))}{\partial y_j} \frac{dy_j(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V(\vec{y}(t))}{\partial y_j} f_j(t, \vec{y}(t)) \leq 0, \quad t \in [0, t_1].$$

Следовательно, функция $V(\vec{y}(t))$ не возрастает на отрезке $[0, t_1]$, что противоречит (2.24).

Таким образом, по произвольному $\varepsilon_1 > 0$ найдено $\delta = \delta(\varepsilon_1)$ такое, что из неравенства $\|\vec{y}_0\| < \delta$ вытекает оценка $\|\vec{y}(t; \vec{y}_0)\| < \varepsilon_1$ для всех $t \geq 0$, означающая устойчивость нулевого решения. $\square$ Поэтому и функция $V(\vec{y}(t))$, являясь скалярной функцией аргумента t , ограничена снизу и не возрастает благодаря неравенству

$$V(\vec{y}(t)) \geq \varepsilon_2.$$

Принимая во внимание неравенство (2.23), имеем

$$V(\vec{y}(t_1)) - V(\vec{y}(0)) \geq \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2}{2} = \frac{\varepsilon_2}{2} > 0. \quad (2.24)$$

С другой стороны, в силу (2.20)

$$\frac{dV(\vec{y}(t))}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V(\vec{y}(t))}{\partial y_j} \frac{dy_j(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V(\vec{y}(t))}{\partial y_j} f_j(t, \vec{y}(t)) \leq 0, \quad t \in [0, t_1].$$

Следовательно, функция $V(\vec{y}(t))$ не возрастает на отрезке $[0, t_1]$, что противоречит (2.24).

Таким образом, по произвольному $\varepsilon_1 > 0$ найдено $\delta = \delta(\varepsilon_1)$ такое, что из неравенства $\|\vec{y}_0\| < \delta$ вытекает оценка $\|\vec{y}(t; \vec{y}_0)\| < \varepsilon_1$ для всех $t \geq 0$, означающая устойчивость нулевого решения. $\square$ Поэтому и функция $V(\vec{y}(t))$, являясь скалярной функцией аргумента t , ограничена снизу и не возрастает благодаря неравенству

$$\frac{dV(\vec{y}(t))}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V(\vec{y}(t))}{\partial y_j} f_j(t, \vec{y}(t)) \leq -W(\vec{y}(t)) \leq 0,$$

которое следует из (2.25). Тогда существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\vec{y}(t)) = \alpha \geq 0.$$

Убедимся, что $\alpha = 0$. Действительно, если $\alpha > 0$, то в силу невозрастания $V(\vec{y}(t))$ из неравенства $V(\vec{y}(t)) \geq \alpha$ согласно п. 2 леммы 2.4.1 вытекает оценка $\|\vec{y}(t)\| \geq \varepsilon_3 > 0$ для всех $t \geq 0$, где $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(\alpha)$. Применим лемму 2.4.1 п. 1 для положительно определенной функции $W(\vec{y})$, убеждаемся в справедливости неравенства $W(\vec{y}(t)) \geq \beta$ для всех $t \geq 0$, где $\beta = \beta(\varepsilon_3) > 0$. Тогда при $t \rightarrow +\infty$ в силу (2.25) и формулы конечных приращений Лагранжа имеем

$$V(\vec{y}(t)) - V(\vec{y}(0)) = \frac{dV(\vec{y}(\xi))}{dt} t \leq -W(\vec{y}(\xi)) t \leq -\beta t \rightarrow -\infty,$$

что противоречит положительной определенности $V(\vec{y})$.

Таким образом $V(\vec{y}(t)) \rightarrow \alpha = 0$ и, в силу следствия из леммы 2.4.1, окончательно убеждаемся, что $\vec{y}(t) \rightarrow \vec{0}$ при $t \rightarrow +\infty$. $\square$

2.8. Исслед ведет в окр точек покоя. Классиф.

Точка $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой покоя (положением равновесия) автономной системы

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = \vec{f}(\vec{y}(t)), \quad (2.30)$$

если $\vec{f}(\vec{y}_0) = \vec{0}$. Таким образом, координаты точек покоя находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(y_1, \dots, y_n) = 0, \\ \dots \\ f_n(y_1, \dots, y_n) = 0. \end{cases}$$

Если $\vec{y}_0$ – точка покоя, то функция $\vec{y}(t) = \vec{y}_0$ является не зависящим от переменных t решением системы (2.30). Траектория такого решения представляет собой прямую линию в пространстве $(t, y_1, \dots, y_n)$, а в фазовом пространстве переменных $(y_1, \dots, y_n)$ – одну точку. Будем называть точку покоя $\vec{y}_0$ устойчивой, асимптотически устойчивой или неустойчивой по Ляпунову, если соответствующее решение $\vec{y}(t) = \vec{y}_0$ устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво по Ляпунову.

Для исследования устойчивости точки покоя можно сделать замену переменных $\vec{y}(t) = \vec{y}(t; \vec{y}_0)$ и перейти к исследованию устойчивости нулевого решения системы

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{y}(t)), \quad \vec{F}(\vec{y}) = \vec{f}(\vec{y} + \vec{y}_0).$$

Для применения теоремы 2.3.1 вычислим элементы матрицы производных $A = (a_{ij})$:

$$a_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(0, \dots, 0) = \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\vec{y}_0).$$

В результате приходим к утверждению об устойчивости по первому приближению произвольной (не обязательно нулевой) точки покоя.

Теорема 2.4.4. Пусть $\vec{y}_0$ – точка покоя системы (2.30), функции $f_j(\vec{y})$ дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности $\vec{y}_0$, $j = 1, \dots, n$.

Если все собственные значения матрицы $A = (\partial f_i(\vec{y}_0)/\partial y_j)$ с положительной вещественной частью:

$$\operatorname{Re} \lambda_k < 0, \quad \forall k = 1, \dots, n,$$

то точка покоя $\vec{y}_0$ асимптотически устойчива по Ляпунову.

Если же найдется хотя бы одно собственное значения матрицы $A = (\partial f_i(\vec{y}_0)/\partial y_j)$ с положительной вещественной частью:

$$\exists \lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} : \operatorname{Re} \lambda > 0,$$

то точка покоя $\vec{y}_0$ неустойчива по Ляпунову.

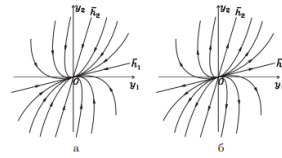


Рис. 2.6. Узел: а – устойчивый, б – неустойчивый.

Узел ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$)

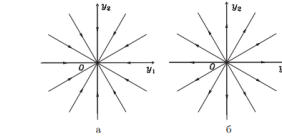


Рис. 2.7. Дикритический узел: а – устойчивый, б – неустойчивый.

Дикритический узел

($\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, $\dim \ker(A - \lambda_1 E) = 2$)

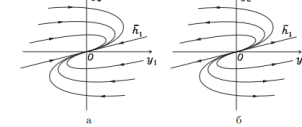
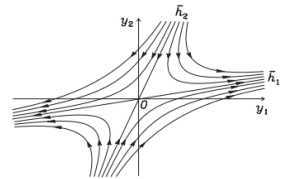


Рис. 2.8. Вырожденный узел: а – устойчивый, б – неустойчивый.

Вырожденный узел

($\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, $\dim \ker(A - \lambda_1 E) = 1$)



Седло ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$)

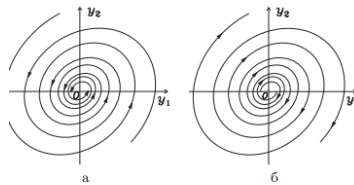


Рис. 2.10. Фокус: а – устойчивый, б – неустойчивый.

Фокус ($\lambda_{1,2} = \delta \pm i\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 0$, $\delta \neq 0$)

2.9. Постановка краевой задачи для лин ОДУ.

В общем случае, краевой задачей для дифференциального уравнения n -го порядка, разрешенного относительно старшей производной, рассматриваемого на отрезке $[0, l]$, называется задача, в которой значения неизвестной функции $y(x)$, ее производных или их линейная комбинация задаются как в точке $x = 0$, так и в точке $x = l$.

Важной особенностью краевых задач является то, что их решение не всегда существует, а если существует, то может быть неединственно. Действительно, рассмотрим уравнение

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (3.5)$$

с краевыми условиями

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = y_1. \quad (3.6)$$

Общее решение уравнения (3.5) имеет вид $c_1 \sin x + c_2 \cos x$. Из краевого условия $y(0) = 0$ получим, что $y(x) = c_1 \sin x$. Если $y_1 \neq 0$, то решение задачи (3.5), (3.6) не существует. Если же $y_1 = 0$, то решением задачи (3.5), (3.6) является функция $y(x) = c_1 \sin x$, где c_1 – произвольная постоянная, то есть решение краевой задачи неединственно. Отметим, что решение задачи Коши для уравнения (3.5) с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ существует и единственно при любых фиксированных y_0, y_1 и $x_0 \in [0, \pi]$.

Рассмотрим краевую задачу для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = f_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3.7)$$

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = u_0, \quad \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = u_1, \quad (3.8)$$

Далее предполагаем, что функции $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, $f_1(x)$ непрерывны на отрезке, $a_0(x) \neq 0$, а постоянные $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ таковы, что $\alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0$, $i = 1, 2$.

Преобразуем уравнение (3.7). Сначала почленно разделим его на $a_0(x)$, а затем умножим на $p(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{a_1(s)}{a_0(s)} ds\right)$. Выделяя полную производную, получаем

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y = f_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3.9)$$

где $p(x)$ – непрерывно дифференцируема на $[0, l]$, $p(x) > 0$, а функции

$$q(x) = -\frac{p(x)a_2(x)}{a_0(x)}, \quad f_2(x) = \frac{p(x)f_1(x)}{a_0(x)}$$

являются непрерывными на $[0, l]$.

Рассмотрим краевые условия (3.8). Если $u_0 = u_1 = 0$, то краевые условия называются однородными, в противном случае – неоднородными. Покажем, что задачу (3.9), (3.8) можно свести к задаче с однородными краевыми условиями. Пусть $y(x)$ – решение задачи (3.9), (3.8). Рассмотрим функцию $z(x) = y(x) - v(x)$, где $v(x)$ – известная дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая краевым условиям (3.8). Подставив в (3.9), (3.8) $y(x) = z(x) + v(x)$, получим для функции $z(x)$ краевую задачу с однородными краевыми условиями

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dz}{dx} \right) - q(x)z = f(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$\alpha_1 z'(0) + \beta_1 z(0) = 0, \quad \alpha_2 z'(l) + \beta_2 z(l) = 0,$$

где

$$f(x) = f_2(x) - \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dv}{dx} \right) + q(x)v.$$

Функцию $v(x)$, удовлетворяющую неоднородным краевым условиям (3.8), можно выбрать различными способами, одним из самых простых является ее поиск в виде многочлена. Далее эту задачу будем называть основной краевой задачей. Краевая задача (3.10), (3.11) называется *однородной*, если $f(x) = 0$ и *неоднородной* в противном случае.

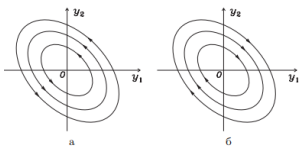


Рис. 2.11. Центр.

Центр ($\lambda_{1,2} = \pm i\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 0$)

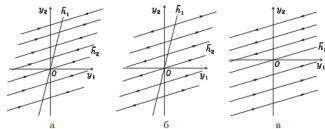


Рис. 2.12. Случай вырожденной матрицы.

Случай вырожденной матрицы A ($\det A = 0$)

2.10. Тожество Лагранжа, ф-ла Грина, опр Вр.

дальнейшем. Введем дифференциальный оператор

$$Ly = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y.$$

Пусть функции $y(x) \in C^2[0, l]$ и $z(x) \in C^2[0, l]$, тогда можно вычислить Ly и Lz , а также выражение

$$z(x)Ly - y(x)Lz = z(x) \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) - y(x) \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dz}{dx} \right).$$

Так как

$$z(x) \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) - y(x) \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dz}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left[p(x) \left(z(x) \frac{dy}{dx} - y(x) \frac{dz}{dx} \right) \right],$$

то

$$z(x)Ly - y(x)Lz = \frac{d}{dx} \left[p(x) \left(z(x) \frac{dy}{dx} - y(x) \frac{dz}{dx} \right) \right], \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3.12)$$

Это равенство называется тождеством Лагранжа.

Получим одно важное следствие из тождества Лагранжа. Пусть $y_1(x), y_2(x)$ – линейно независимые решения однородного уравнения $Ly = 0$, то есть $Ly_1 = Ly_2 = 0$. Записывая для функций $y_1(x), y_2(x)$ тождество Лагранжа (3.12), получим

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \left(y_1(x) \frac{dy_2}{dx} - y_2(x) \frac{dy_1}{dx} \right) \right] = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3.13)$$

Следовательно, для определителя Вронского

$$W[y_1, y_2](x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

справедлива формула $p(x)W[y_1, y_2](x) = c$, $0 \leq x \leq l$, где c – постоянная или

$$W[y_1, y_2](x) = \frac{c}{p(x)}, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3.14)$$

Интегрируя тождество Лагранжа (3.12) от 0 до l , получим

$$\int_0^l (z(x)Ly - y(x)Lz) dx = p(x) \left(z(x)y'(x) - y(x)z'(x) \right) \Big|_{x=0}^{x=l}. \quad (3.15)$$

Эта формула называется формулой Грина.

Покажем, что, если функции $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют одним и тем же краевым условиям (3.11), то справедливо равенство

$$\int_0^l (z(x)Ly - y(x)Lz) dx = 0. \quad (3.16)$$

Действительно, из формулы Грина следует, что достаточно доказать равенство

$$p(l)(z(l)y'(l) - y(l)z'(l)) - p(0)(z(0)y'(0) - y(0)z'(0)) = 0.$$

Покажем, что

$$z(0)y'(0) - y(0)z'(0) = 0. \quad (3.17)$$

Если $\alpha_1 = 0$, то $\beta_1 \neq 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$, и (3.17) выполнено. При $\alpha_1 \neq 0$ запишем граничные условия

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \quad \alpha_1 z'(0) + \beta_1 z(0) = 0,$$

умножим первое равенство на $z(0)$, второе – на $y(0)$. Вычитая почленно полученные равенства, имеем

$$\alpha_1 (z(0)y'(0) - y(0)z'(0)) = 0,$$

откуда вытекает (3.17). Аналогично устанавливается, что

$$z(l)y'(l) - y(l)z'(l) = 0.$$

Тем самым равенство (3.16) доказано.

2.11. Ф-ция Грина. Суц и един ф-ции Грина.

Рассмотрим краевую задачу

$$Ly = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y = f(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3.18)$$

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \quad (3.19)$$

$$\alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0, \quad (3.20)$$

где $p(x), q(x), f(x)$ – известные функции, а $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ – известные постоянные такие, что $p(x) \in C^1[0, l]$, $p(x) > 0$, $x \in [0, l]$, $q(x), f(x) \in C[0, l]$, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0$, $i = 1, 2$.

Определение 3.2.1. Функция $y(x)$ называется решением краевой задачи (3.18)–(3.20), если $y(x) \in C^2[0, l]$ и удовлетворяет (3.18)–(3.20).

Определение 3.2.2. Функция $G(x, \xi)$ называется функцией Грина краевой задачи (3.18)–(3.20), если она определена в квадрате $[0, l] \times [0, l]$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) Для любого $\xi \in (0, l)$ функция $G(x, \xi)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменной x на множестве $[0, \xi) \cup (\xi, l]$ и удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dG(x, \xi)}{dx} \right) - q(x)G(x, \xi) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad x \neq \xi.$$

2) Функция $G(x, \xi)$ удовлетворяет однородным краевым условиям по переменной x :

$$\alpha_1 G_x(0, \xi) + \beta_1 G(0, \xi) = 0, \quad \alpha_2 G_x(l, \xi) + \beta_2 G(l, \xi) = 0, \quad \forall \xi \in (0, l),$$

3) Функция $G(x, \xi)$ непрерывна в квадрате $[0, l] \times [0, l]$, а частная производная $G_x(x, \xi)$ при $x = \xi$ имеет конечные предельные значения

$$G_x(\xi + 0, \xi) = \lim_{x \rightarrow \xi+0} G_x(x, \xi), \quad G_x(\xi - 0, \xi) = \lim_{x \rightarrow \xi-0} G_x(x, \xi),$$

связанные соотношением

$$G_x(\xi + 0, \xi) - G_x(\xi - 0, \xi) = \frac{1}{p(\xi)}, \quad \forall \xi \in (0, l).$$

Теорема 3.2.1. Если однородная краевая задача

$$Lv = 0, \quad \alpha_1 v'(0) + \beta_1 v(0) = 0, \quad \alpha_2 v'(l) + \beta_2 v(l) = 0 \quad (3.21)$$

имеет только нулевое решение, то функция Грина краевой задачи (3.18)–(3.20) существует и единственна.

Доказательство. Определим функцию $y_1(x)$ как решение задачи Коши

$$Ly_1 = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad y_1(0) = -\alpha_1, \quad y_1'(0) = \beta_1,$$

а функцию $y_2(x)$ как решение задачи Коши

$$Ly_2 = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad y_2(l) = -\alpha_2, \quad y_2'(l) = \beta_2.$$

Очевидно, что функция $y_1(x)$ удовлетворяет краевому условию (3.19), а $y_2(x)$ краевому условию (3.20):

$$\alpha_1 y_1'(0) + \beta_1 y_1(0) = 0, \quad \alpha_2 y_2'(l) + \beta_2 y_2(l) = 0. \quad (3.22)$$

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы, так как в противном случае однородная краевая задача имела бы ненулевое решение.

Будем искать функцию Грина в следующем виде:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} c_1(\xi)y_1(x), & 0 \leq x \leq \xi, \\ c_2(\xi)y_2(x), & \xi \leq x \leq l, \end{cases}$$

где $c_1(\xi)$ и $c_2(\xi)$ неизвестные функции. Из этого представления следует, что функция $G(x, \xi)$ удовлетворяет условиям 1) и 2) определения функции Грина. Выберем $c_1(\xi)$ и $c_2(\xi)$ так, чтобы выполнялось и условие 3). Из непрерывности $G(x, \xi)$ в точке $x = \xi$ следует, что

$$c_1(\xi)y_1(\xi) = c_2(\xi)y_2(\xi).$$

Из условия разрыва производной $G_x(x, \xi)$ в точке $x = \xi$ имеем

$$c_2(\xi)y_2'(\xi) - c_1(\xi)y_1'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)}.$$

Таким образом, мы получили систему двух уравнений относительно неизвестных функций $c_1(\xi)$ и $c_2(\xi)$. Решив эту систему, найдем, что

$$c_1(\xi) = \frac{y_2(\xi)}{W(\xi)p(\xi)}, \quad c_2(\xi) = \frac{y_1(\xi)}{W(\xi)p(\xi)},$$

где $W(\xi) = y_1(\xi)y_2'(\xi) - y_2(\xi)y_1'(\xi)$ – определитель Вронского. Как следует из формулы (3.14), $W(\xi)p(\xi) = g_0$ – известная постоянная. В результате получим окончательную формулу для функции Грина

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(\xi)}{g_0}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{y_1(\xi)y_2(x)}{g_0}, & \xi \leq x \leq l. \end{cases} \quad (3.23)$$

Мы доказали существование функции Грина. Докажем теперь ее единственность. Предположим, что существуют две функции Грина: $G(x, \xi)$ и $\tilde{G}(x, \xi)$. Пусть ξ – произвольная фиксированная точка из интервала $(0, l)$. Рассмотрим функцию $z(x) = G(x, \xi) - \tilde{G}(x, \xi)$. Эта функция непрерывна на отрезке $[0, l]$ и имеет на нем непрерывную производную $z'(x)$, поскольку $G_x(x, \xi)$ и $\tilde{G}_x(x, \xi)$ имеют в точке $x = \xi$ один и тот же разрыв. Записывая далее из уравнения $Lz = 0$, $x \neq \xi$, выражение

$$z''(x) = \frac{q(x)z(x) - p'(x)z'(x)}{p(x)},$$

убеждаемся в непрерывности второй производной при $x = \xi$ благодаря равенству ее предельных значений при $x \rightarrow \xi \pm 0$. Тогда функция $z(x)$ является решением уравнения также и при $x = \xi$,

$$Lz = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

и удовлетворяет условиям (3.19), (3.20). По условию теоремы однородная краевая задача на отрезке $[0, l]$ имеет только тривиальное решение. Поэтому $z(x) = 0$, а значит $G(x, \xi) = \tilde{G}(x, \xi)$, и теорема 3.2.1 доказана. $\square$

2.12. Реш краевой зад для неод ОДУ, Грин.

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(\xi)}{g_0}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{y_1(\xi)y_2(x)}{g_0}, & \xi \leq x \leq l. \end{cases} \quad (3.23)$$

$$Ly = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y = f(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3.18)$$

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \quad (3.19)$$

$$\alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0, \quad (3.20)$$

$$Lv = 0, \quad \alpha_1 v'(0) + \beta_1 v(0) = 0, \quad \alpha_2 v'(l) + \beta_2 v(l) = 0 \quad (3.21)$$

Теорема 3.2.2. Если однородная краевая задача (3.21) имеет только нулевое решение, то решение краевой задачи (3.18)–(3.20) существует, единственно и задается формулой

$$y(x) = \int_0^l G(x, \xi)f(\xi)d\xi, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3.25)$$

Доказательство. Покажем, что функция $y(x)$, определяемая формулой (3.25), является решением краевой задачи (3.18)–(3.20).

Из формулы (3.23) для функции Грина следует, что

$$y(x) = \frac{y_2(x)}{g_0} \int_0^x y_1(\xi)f(\xi)d\xi + \frac{y_1(x)}{g_0} \int_x^l y_2(\xi)f(\xi)d\xi. \quad (3.26)$$

После дифференцирования и приведения подобных слагаемых получаем

$$y'(x) = \frac{y_2'(x)}{g_0} \int_0^x y_1(\xi)f(\xi)d\xi + \frac{y_1'(x)}{g_0} \int_x^l y_2(\xi)f(\xi)d\xi. \quad (3.27)$$

Вычислим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) &= \frac{(y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x))p(x)}{g_0} f(x) + \\ &+ \frac{1}{g_0} \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy_2}{dx} \right) \int_0^x y_1(\xi)f(\xi)d\xi + \frac{1}{g_0} \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy_1}{dx} \right) \int_x^l y_2(\xi)f(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Так как $Ly_1 = Ly_2 = 0$, а $(y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x))p(x) = g_0$, то

$$\begin{aligned} Ly &= \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y(x) = \\ &= f(x) + \frac{Ly_2}{g_0} \int_0^x y_1(\xi)f(\xi)d\xi + \frac{Ly_1}{g_0} \int_x^l y_2(\xi)f(\xi)d\xi = f(x). \end{aligned}$$

Следовательно, $y(x)$ является решением уравнения (3.18).

Убедимся в выполнении краевых условий (3.19), (3.20). Из формул (3.26), (3.27) и (3.22) следует, что

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = \frac{\alpha_1 y_1'(0) + \beta_1 y_1(0)}{g_0} \int_0^l y_2(\xi)f(\xi)d\xi = 0.$$

Аналогично проверяется (3.20).

Докажем единственность полученного решения. Пусть имеется еще одно решение $\tilde{y}(x)$ краевой задачи (3.18)–(3.20). Тогда их разность $v(x) = y(x) - \tilde{y}(x)$ будет решением однородной краевой задачи (3.21) на отрезке $[0, l]$ и по условию теоремы равна нулю, то есть $y(x) - \tilde{y}(x) \equiv 0$, и теорема 3.2.2 доказана. $\square$

2.13. Сущ и един решения краевой нелин ур-я.

Рассмотрим краевую задачу

$$y''(x) + a^2 y(x) = F(x, y(x)), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3.28)$$

$$y(0) = y(l) = 0. \quad (3.29)$$

Теорема 3.2.3. Пусть функция $F(x, y)$ определена и непрерывна при $x \in [0, l]$ и $y \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет условию Липшица по y :

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall x \in [0, l], \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Если $lL(a|\sin al|)^{-1} < 1$, то решение краевой задачи (3.28), (3.29) существует и единственно.

Доказательство. Пусть $y(x)$ - решение краевой задачи (3.28), (3.29). Введем функцию $f(x) = F(x, y(x))$. Тогда функция $y(x)$ является решением краевой задачи

$$y''(x) + a^2 y(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ y(0) = 0, \quad y(l) = 0,$$

Функция Грина для решения этой задачи имеет вид (3.24). Применяя функцию Грина, получим

$$y(x) = \int_0^l G_a(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Учитывая определение функции $f(x)$, имеем

$$y(x) = \int_0^l G_a(x, \xi) F(\xi, y(\xi)) d\xi, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3.30)$$

Таким образом, мы показали, что, если функция $y(x)$ - решение краевой задачи (3.28), (3.29), то она является решением интегрального уравнения (3.30).

Справедливо и обратное. Пусть функция $y(x)$ непрерывна на отрезке $[0, l]$ и является решением интегрального уравнения (3.30). Из формул (3.24), (3.30) следует, что функция $y(x)$ удовлетворяет краевым условиям (3.29). Дифференцируя уравнение (3.30) два раза и подставляя $y(x)$ и $y''(x)$ в уравнение (3.28), легко убедиться в том, что $y(x)$ является решением этого уравнения. Следовательно, непрерывное решение уравнения (3.30) является решением краевой задачи (3.28), (3.29). Таким образом, мы показали, что краевая задача (3.28), (3.29) эквивалентна интегральному уравнению (3.30).

Докажем существование решения уравнения (3.30), непрерывного на отрезке $[0, l]$. Рассмотрим последовательность функций $y_0(x) \equiv 0$,

$$y_{n+1}(x) = \int_0^l G_a(x, \xi) F(\xi, y_n(\xi)) d\xi, \quad 0 \leq x \leq l, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.31)$$

Все функции $y_n(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[0, l]$.

Покажем, что справедлива оценка

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq M \left(\frac{lL}{a|\sin al|} \right)^n, \quad 0 \leq x \leq l, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.32)$$

где

$$M = \max_{0 \leq x \leq l} |y_1(x)| = \max_{0 \leq x \leq l} \left| \int_0^l G_a(x, \xi) F(\xi, 0) d\xi \right|.$$

Действительно, при $n = 0$ она верна. Пусть она верна при $n = m - 1$. Покажем, что она справедлива и при $n = m$. Оценим $|y_{m+1}(x) - y_m(x)|$. Так как

$$|G_a(x, \xi)| \leq |a|\sin al|^{-1}, \quad 0 \leq x, \xi \leq l,$$

то

$$|y_{m+1}(x) - y_m(x)| \leq \int_0^l |G_a(x, \xi)| |F(\xi, y_m(\xi)) - F(\xi, y_{m-1}(\xi))| d\xi \leq \\ \leq \frac{L}{a|\sin al|} \int_0^l |y_m(\xi) - y_{m-1}(\xi)| d\xi \leq M \left(\frac{lL}{a|\sin al|} \right)^m, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Следовательно, оценка (3.32) доказана по индукции.

Так как

$$y_k(t) = \sum_{n=1}^k (y_n(t) - y_{n-1}(t)),$$

то равномерная сходимость последовательности $y_k(t)$ на отрезке $[0, l]$ эквивалентна равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (y_n(t) - y_{n-1}(t)).$$

Из оценки (3.32) и признака Вейерштрасса следует, что этот ряд сходится равномерно на отрезке $[0, l]$. Следовательно, последовательность функций $y_k(x)$ также сходится равномерно на отрезке $[0, l]$ к некоторой функции $y(x)$. Так как все функции $y_k(t)$ непрерывны, то и $y(x)$ непрерывна на отрезке $[0, l]$. Переходя в формуле (3.31) к пределу при n стремляемся к бесконечности, получим, что функция $y(x)$ является решением уравнения (3.30). Следовательно, она является решением краевой задачи (3.28), (3.29).

Докажем единственность решения краевой задачи (3.28), (3.29). Для этого достаточно доказать, что уравнение (3.30) имеет единственное непрерывное решение. Предположим, что это не так и существуют две непрерывные функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, являющиеся решениями уравнения (3.30). Тогда

$$y_1(x) - y_2(x) = \int_0^l G_a(x, \xi) [F(\xi, y_1(\xi)) - F(\xi, y_2(\xi))] d\xi, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Используя оценку для функции Грина $G_a(x, \xi)$, получим

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq \int_0^l |G_a(x, \xi)| L |y_1(\xi) - y_2(\xi)| d\xi < \\ < \max_{0 \leq x \leq l} |y_1(x) - y_2(x)|, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Из этого неравенства вытекает что $y_1(x) = y_2(x)$. Таким образом, решение краевой задачи единственно и теорема 3.2.3 доказана. $\square$

2.14. Задача Штурма-Лиувилля.

Рассмотрим краевую задачу

$$Ly = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y = -\lambda y, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3.33)$$

$$\alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = 0, \quad \alpha_2 y(l) + \beta_2 y'(l) = 0, \quad (3.35)$$

где $p(x)$, $q(x)$ - известные действительные функции, $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ - известные действительные постоянные такие, что $p(x) \in C^1[0, l]$, $p(x) > 0$, $x \in [0, l]$, $q(x) \in C[0, l]$, $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$, $i = 1, 2$ и λ - комплексный параметр.

Очевидно, что при любом значении параметра λ краевая задача (3.33)-(3.35) имеет решение $y(x) = 0$.

Определение 3.3.1. Если для некоторого λ_1 краевая задача (3.33)-(3.35) имеет нетривиальное решение $y_1(x)$, то λ_1 называется **собственным значением**, а $y_1(x)$ **собственной функцией**.

Задача поиска собственных значений и собственных функций называется задачей Штурма-Лиувилля.

теорема 3.3.1. Все собственные функции и собственные значения задачи Штурма-Лиувилля действительны.

Доказательство. Пусть λ_1 - собственное значение, а $y_1(x)$ - соответствующая ему собственная функция. Предположим, что она комплекснозначная, то есть $\lambda_1 = a + ib$, $y_1(x) = u(x) + iv(x)$. Так как функция $y_1(x)$ является решением уравнения (3.33), то $Ly_1 = -\lambda_1 y_1(x)$. Записывая это равенство отдельно для действительных и мнимых частей, получим

$$Lu = -au(x) + bv(x), \quad (3.36)$$

$$Lv = -bu(x) - av(x). \quad (3.37)$$

Так как функция $y_1(x)$ удовлетворяет краевым условиям (3.34), (3.35), то и функции $u(x)$, $v(x)$ удовлетворяют этим краевым условиям.

Умножим уравнение (3.36) на $v(x)$, а уравнение (3.37) на $u(x)$, проинтегрируем затем оба уравнения от 0 до l и вычтем из первого второе. В результате получим

$$\int_0^l (v(x)Lu - u(x)Lv) dx = b \int_0^l (u^2(x) + v^2(x)) dx.$$

Применяя следствие из формулы Грина

$$\int_0^l (v(x)Lu - u(x)Lv) dx = 0, \quad (3.38)$$

имеем

$$b \int_0^l (u^2(x) + v^2(x)) dx = 0.$$

Следовательно, $b = 0$. Значит λ_1 действительно и $y_1(x)$ также действительна. $\square$

Теорема 3.3.2. Каждому собственному значению соответствует только одна собственная функция.

Доказательство. Пусть собственному значению λ соответствуют две собственные функции $y_1(x)$, $y_2(x)$. Это значит, что они являются решениями уравнения (3.33) и удовлетворяют краевым условиям (3.34), (3.35). Из краевого условия (3.34) следует, что определитель Вронского $W[y_1, y_2](0) = 0$. Так как $y_1(x)$, $y_2(x)$ - решения одного и того же линейного однородного дифференциального уравнения (3.33), то $y_2(x) = cy_1(x)$.

Введем скалярное произведение функций $v(x)$ и $w(x)$

$$(v, w) = \int_0^l v(x)w(x) dx.$$

Будем называть функции $v(x)$ и $w(x)$ **ортгональными**, если их скалярное произведение равно нулю, то есть $(v, w) = 0$.

Теорема 3.3.3. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, являются ортогональными.

Доказательство. Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$ - различные собственные значения, а $y_1(x)$, $y_2(x)$ - соответствующие им собственные функции. Так как $y_1(x)$, $y_2(x)$ удовлетворяют краевым условиям (3.34), (3.35), то из следствия из формулы Грина (3.16) получим, что

$$(Ly_1, y_2) - (y_1, Ly_2) = \int_0^l (y_2(x)Ly_1 - y_1(x)Ly_2) dx = 0.$$

Так как $Ly_1 = -\lambda_1 y_1(x)$, $Ly_2 = -\lambda_2 y_2(x)$, то

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(y_1, y_2) = \lambda_1(y_1, y_2) - \lambda_2(y_1, y_2) = \\ = (\lambda_1 y_1, y_2) - (y_1, \lambda_2 y_2) = -(Ly_1, y_2) + (y_1, Ly_2) = 0.$$

Следовательно, $(\lambda_1 - \lambda_2)(y_1, y_2) = 0$, а значит $(y_1, y_2) = 0$ и функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ ортогональны. $\square$

Теорема 3.3.4. Пусть $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Тогда, если λ - собственное значение, то

$$\lambda \geq \min_{0 \leq x \leq l} q(x). \quad (3.39)$$

Доказательство. Предположим, что λ_1 - собственное значение, $y_1(x)$ - соответствующая собственная функция и

$$\lambda_1 < \min_{0 \leq x \leq l} q(x).$$

Тогда $q(x) - \lambda_1 > 0$ на отрезке $[0, l]$. Из уравнения (3.33) следует, что

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy_1}{dx} \right) = (-\lambda_1 + q(x))y_1(x).$$

Интегрируя от 0 до x , получим

$$p(x)y_1'(x) = p(0)y_1'(0) + \int_0^x (q(s) - \lambda_1)y_1(s) ds. \quad (3.40)$$

Так как $y_1(x)$ удовлетворяет краевым условиям (3.34), (3.35) и $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то $y_1(0) = y_1(l) = 0$. Так как $y_1(x)$ - ненулевое решение (3.33), то $y_1'(0) \neq 0$. Пусть для определенности $y_1'(0) > 0$. Тогда $y_1'(x) > 0$ при $x \in [0, l]$. Предположим, что это не так. Обозначим через x_0 минимальное число, при котором $y_1'(x_0) = 0$. Тогда для $x \in [0, x_0]$ производная $y_1'(x) > 0$, а значит и $y_1(x) > 0$ при $x \in (0, x_0)$. Положим в (3.40) $x = x_0$ и учитывая положительность $q(x) - \lambda_1$, получим, что $y_1'(x_0) > 0$. Это противоречие доказывает положительность $y_1'(x)$ при $x \in [0, l]$. Но тогда $y_1(x) > 0$ при $x \in (0, l]$, что противоречит краевому условию $y_1(l) = 0$. Следовательно, исходное предположение неверно и неравенство (3.39) доказано. $\square$

2.15. Первые интегр нормальной сист ОДУ.

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений n -го порядка

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \end{cases} \quad (4.1)$$

где функции $f_i(t, \vec{x})$ являются непрерывными в области $D_1 \in \mathbb{R}^{n+1}$ вместе со всеми частными производными $\partial f_i(t, \vec{x}) / \partial x_j$, $i, j = 1, \dots, n$.

Определение 4.1.1. Первым интегралом системы (4.1) в области D_1 называется функция $v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1)$, сохраняющая постоянное значение вдоль каждой лежащей в D_1 интегральной кривой системы (4.1).

Таким образом, для каждого решения $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ системы (4.1) найдется константа C такая, что

$$v(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \equiv C. \quad (4.2)$$

Определение 4.1.2. Производной функции $v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1)$ в силу системы (4.1) называется функция

$$\frac{dv}{dt} \Big|_{(4.1)} = \frac{\partial v(t, \vec{x})}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial v(t, \vec{x})}{\partial x_j} f_j(t, \vec{x}), \quad (t, \vec{x}) \in D_1.$$

Лемма 4.1.1. Функция $v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1)$ является первым интегралом системы (4.1) в области D_1 тогда и только тогда, когда ее производная в силу системы (4.1) равна нулю в D_1 :

$$\frac{dv}{dt} \Big|_{(4.1)} = 0, \quad \forall (t, \vec{x}) \in D_1. \quad (4.3)$$

Определение 4.1.3. Первые интегралы $v_1(t, \vec{x}), \dots, v_k(t, \vec{x})$ системы (4.1) называются **функционально независимыми** в области D_1 , если ранг матрица производных равен количеству функций k :

$$\text{rang} \left(\frac{\partial v_i(t, \vec{x})}{\partial x_j} \right) = k, \quad \forall (t, \vec{x}) \in D_1.$$

Теорема 4.1.1. Пусть в области D_1 существует n функционально независимых первых интегралов $v_1(t, \vec{x}), \dots, v_n(t, \vec{x})$ системы (4.1). Тогда для любой точки $(t_0, \vec{x}_0) \in D_1$ решение $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ задачи Коши

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = f_k(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad k = 1, \dots, n, \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \quad (4.4)$$

однозначно определяется как неявная функция из системы уравнений

$$\begin{cases} v_1(t, \vec{x}) = c_1^0, \\ \vdots \\ v_n(t, \vec{x}) = c_n^0, \end{cases} \quad (4.5)$$

где $c_j^0 = v_j(t_0, \vec{x}_0)$, $j = 1, \dots, n$.

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений (4.5) в окрестности точки $(t_0, \vec{x}_0)$. В самой точке уравнения очевидно удовлетворяются, причем в силу функциональной независимости первых интегралов (см. определение 4.1.3 при $k = n$) якобиан по переменным $(x_1, \dots, x_n)$ отличен от нуля:

$$\det \left(\frac{\partial v_i(t_0, \vec{x}_0)}{\partial x_j} \right) \neq 0.$$

Тогда по теореме о неявных функциях (см. теорему А.1.1 в дополнении) в некоторой окрестности точки t_0 существуют непрерывно дифференцируемые функции

$$x_j(t) = g_j(t, c_1^0, \dots, c_n^0), \quad j = 1, \dots, n,$$

такие, что при подстановке $\vec{g}(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))$ в (4.5) получается тождество:

$$\begin{cases} v_1(t, \vec{g}(t)) = c_1^0, \\ \vdots \\ v_n(t, \vec{g}(t)) = c_n^0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Пусть $\vec{x}(t)$ - решение задачи Коши (4.4). По определению первых интегралов имеем

$$v_j(t, \vec{x}(t)) = v_j(t_0, \vec{x}(t_0)) = v_j(t_0, \vec{x}_0) = c_j^0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Таким образом, $\vec{x}(t)$ удовлетворяет той же самой системе функциональных уравнений (4.6), что и $\vec{g}(t)$. Из единственности неявной функции в окрестности t_0 найденные функции совпадают: $\vec{x}(t) \equiv \vec{g}(t)$. $\square$

2.16. Линейн однор ур-е в частн производ 1 пор.

$$a_1(\bar{x}) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(\bar{x}) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(\bar{x}) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \quad (4.7)$$

$$a_j(\bar{x}) \in C^1(D_0), j = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n a_j^2(\bar{x}) \neq 0, \quad \forall \bar{x} \in D_0. \quad (4.8)$$

По коэффициентам уравнения (4.7) построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = a_1(x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} = a_n(x_1(t), \dots, x_n(t)). \end{cases} \quad (4.9)$$

Лемма 4.2.1. Функция $u(\bar{x}) \in C^1(D_0)$ является решением линейного однородного уравнения в частных производных (4.7) тогда и только тогда, когда $u(\bar{x})$ является не содержащим t первым интегралом системы (4.9) в области D_0 .

Доказательство. Пусть $u(\bar{x})$ является не содержащим t первым интегралом системы (4.9) в области D_0 . Тогда по лемме 4.1.1 о свойствах первого интеграла его производная в силу системы (4.9) равна нулю в области D_0 :

$$\frac{du}{dt} \Big|_{(4.9)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_j} a_j(\bar{x}) = 0, \quad \forall \bar{x} \in D_0.$$

Поэтому $u(\bar{x})$ – решение уравнения в частных производных (4.7).

Обратно, пусть $u(\bar{x})$ – решение уравнения в частных производных (4.7). Тогда его левая часть представляет собой выражение для производной $u(\bar{x})$ в силу системы (4.9), и это выражение равно нулю в области D_0 . Согласно лемме 4.1.1 отсюда заключаем, что $u(\bar{x})$ является первым интегралом (4.9) в области D_0 . $\square$

Теорема 4.2.1. Пусть в области D_0 система (4.9) имеет ровно $n-1$ не содержащих t функционально независимых первых интегралов

$$v_1(x_1, \dots, x_n), \quad v_2(x_1, \dots, x_n), \quad \dots, \quad v_{n-1}(x_1, \dots, x_n).$$

Тогда в некоторой окрестности произвольной точки $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0) \in D_0$ общее решение линейного однородного уравнения в частных производных (4.7) имеет вид

$$u(\bar{x}) = F(v_1(\bar{x}), v_2(\bar{x}), \dots, v_{n-1}(\bar{x})), \quad (4.10)$$

где $F(y_1, \dots, y_{n-1})$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Доказательство. Если $v_j(\bar{x})$ – первые интегралы системы (4.9), $j = 1, \dots, n-1$, то для любой непрерывно дифференцируемой функции $F(y_1, \dots, y_{n-1})$ функция $u(\bar{x})$, определенная формулой (4.10), также является первым интегралом, не зависящим от t . Тогда по лемме 4.2.1 $u(\bar{x})$ – решение линейного однородного уравнения в частных производных (4.7).

Убедимся, что формулой (4.10) описываются все решения линейного однородного уравнения (4.7) в окрестности каждой точки $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0) \in D_0$. Пусть $u(\bar{x})$ – произвольное фиксированное решение уравнения (4.10). Так как функции $v_1(\bar{x}), \dots, v_{n-1}(\bar{x})$ являются первыми интегралами системы (4.9), то согласно лемме 4.2.1 эти функции являются решениями уравнения (4.7). Таким образом,

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j(\bar{x}) \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_j} = 0, \\ \sum_{j=1}^n a_j(\bar{x}) \frac{\partial v_1(\bar{x})}{\partial x_j} = 0, \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_j(\bar{x}) \frac{\partial v_{n-1}(\bar{x})}{\partial x_j} = 0, \end{cases} \quad \forall \bar{x} \in D_0. \quad (4.11)$$

В силу условия (4.8) в каждой точке $\bar{x} \in D_0$ система (4.11) представляет собой имеющую нетривиальное решение $a_1(\bar{x}), \dots, a_n(\bar{x})$ однородную систему линейных алгебраических уравнений. Тогда определитель этой системы, представляющий собой определитель функциональной матрицы, равен нулю

$$\frac{D(u, v_1, \dots, v_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = 0, \quad \forall \bar{x} \in D_0.$$

При этом в силу функциональной независимости $v_1(\bar{x}), \dots, v_{n-1}(\bar{x})$ соответствующий минор порядка $(n-1)$ отличен от нуля. Тогда по теореме о функциональных матрицах в окрестности каждой точки M_0 найдется непрерывно дифференцируемая функция $F(y_1, \dots, y_{n-1})$ такая, что в окрестности M_0 справедливо равенство (4.10). $\square$

2.17. Квазилиин ур-е в частн произв 1-го пор.

Дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка называется квазилинейным, если в это уравнение частные производные входят линейно, то есть

$$\sum_{j=1}^n a_j(x_1, \dots, x_n, u(\bar{x})) \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_j} = b(x_1, \dots, x_n, u(\bar{x})),$$

где функции $a_j(\bar{x}, u) = a_j(x_1, \dots, x_n, u)$, $b(\bar{x}, u) = b(x_1, \dots, x_n, u)$ считаются заданными на некотором множестве $D_1 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, причем всюду в D_1 выполнено условие $\sum_{j=1}^n a_j^2(\bar{x}, u) \neq 0$.

Определение 4.2.1. Функция $u(\bar{x})$ называется решением квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка в области $D_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, если

1. $u(\bar{x})$ непрерывно дифференцируема в D_0 (то есть $u(\bar{x}) \in C^1(D_0)$);

2. для любого $\bar{x} \in D_0$ точка $(\bar{x}, u(\bar{x})) \in D_1$;

3. при подстановке функции $u(\bar{x})$ в обе части квазилинейного уравнения получается тождество в области D_0 .

$$a_1(\bar{x}, u(\bar{x})) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(\bar{x}, u(\bar{x})) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(\bar{x}, u(\bar{x})) \frac{\partial u}{\partial x_n} = b(\bar{x}, u(\bar{x})), \quad (4.12)$$

$$a_j(\bar{x}, u), b(\bar{x}, u) \in C^1(D), \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^n a_j^2(\bar{x}, u) \neq 0, \quad \forall (\bar{x}, u) \in D.$$

По коэффициентам и правой части уравнения (4.12) построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений $(n+1)$ -го порядка.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1(\bar{x}, u), \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_n(\bar{x}, u), \\ \frac{du}{dt} = b(\bar{x}, u). \end{cases} \quad (4.13)$$

Определение 4.2.3. Решения $(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t))$ системы (4.13) определяют фазовые кривые в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, которые называются характеристистиками уравнения в частных производных (4.12).

Теорема 4.2.2. Пусть $v(\bar{x}, u)$ – не содержащий t первый интеграл системы (4.13) в области D , и в некоторой точке $N_0(x_1^0, \dots, x_n^0, u^0) \in D$ выполнены условия

$$v(N_0) = C_0, \quad \frac{\partial v(N_0)}{\partial u} \neq 0. \quad (4.14)$$

Тогда в некоторой окрестности точки N_0 уравнение

$$v(x_1, \dots, x_n, u) = C_0 \quad (4.15)$$

определяет неявную функцию $u = u(x_1, \dots, x_n)$, являющуюся решением квазилинейного уравнения (4.12).

Доказательство. Пусть $v(\bar{x}, u)$ является не содержащим t первым интегралом системы (4.13). Тогда по лемме 4.1.1 о свойствах первого интеграла его производная в силу системы (4.13) равна нулю в области D :

$$\frac{dv}{dt} \Big|_{(4.13)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial v(\bar{x}, u)}{\partial x_j} a_j(\bar{x}, u) + \frac{\partial v(\bar{x}, u)}{\partial u} b(\bar{x}, u) = 0, \quad \forall (\bar{x}, u) \in D. \quad (4.16)$$

Для функционального уравнения (4.15) в силу (4.14) по теореме о неявной функции существует окрестность точки $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$, в которой определена непрерывно дифференцируемая функция $u = u(x_1, \dots, x_n)$, обращающая уравнение (4.15) в тождество в этой окрестности:

$$v(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n)) \equiv C_0.$$

По формуле дифференцирования неявной функции имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} = - \frac{\partial v}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

После подстановки этих равенств в (4.16) и деления на $\partial v / \partial u \neq 0$ приходим к равенству

$$\sum_{j=1}^n a_j(\bar{x}, u(\bar{x})) \frac{\partial u}{\partial x_j} = b(\bar{x}, u(\bar{x}))$$

в рассматриваемой окрестности точки M_0 . То есть $u(\bar{x})$ – решение квазилинейного уравнения в частных производных (4.12). $\square$

2.18. Функционалы, примеры. Вариация.

Рассмотрим множество M , являющееся некоторым подмножеством множества непрерывных на отрезке функций $C[x_0, x_1]$.

Определение 5.1.1. Функционалом называется отображение множеств M в множество действительных чисел.

Приведем некоторые примеры.

Пусть множество M совпадает со всем множеством $C[x_0, x_1]$. Определим функционал $\Phi[y(x)]$ следующим образом: $\Phi[y(x)] = y(x_0) + 2y(x_1)$. Другим примером функционала, определенного на этом множестве, является

$$\Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y(x) dx.$$

Определение 5.1.2. Допустимой вариацией функции $y_0(x) \in M$ называется любая функция $\delta y(x)$ такая, что $y_0(x) + \delta y(x) \in M$.

Определение 5.1.3. Вариацией $\delta \Phi[y_0(x), \delta y(x)]$ функционала $\Phi[y(x)]$ на функции $y_0(x) \in M$ называется

$$\frac{d}{dt} \Phi[y_0(x) + t \delta y(x)] \Big|_{t=0}.$$

Определение 5.1.4. Функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x) \in M$ глобального минимума (максимума) на множестве M , если для любой $y(x) \in M$ выполнено неравенство $\Phi[y_0(x)] \leq \Phi[y(x)]$ ($\Phi[y_0(x)] \geq \Phi[y(x)]$).

Пусть на множестве M введена некоторая норма функции $y(x)$, например

$$\|y(x)\| = \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |y(x)|.$$

Определение 5.1.5. Функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x) \in M$ локального минимума (максимума) на множестве M , если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любой $y(x) \in M$ и удовлетворяющей неравенству $\|y(x) - y_0(x)\| < \varepsilon$, справедливо $\Phi[y_0(x)] \leq \Phi[y(x)]$ ($\Phi[y_0(x)] \geq \Phi[y(x)]$).

Теорема 5.1.1. Если функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x) \in M$ локального минимума или максимума на множестве M и вариация функционала на $y_0(x)$ существует, то вариация функционала $\delta \Phi[y_0(x), \delta y(x)]$ равна нулю для любой допустимой вариации $\delta y(x)$.

Доказательство. Пусть функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x)$ локального экстремума. Рассмотрим $\Phi[y_0(x) + t \delta y(x)]$, где $\delta y(x)$ произвольная вариация $y_0(x)$. При фиксированных $y_0(x)$ и $\delta y(x)$ функционал $\Phi[y_0(x) + t \delta y(x)]$ является функцией переменной t :

$$\varphi(t) = \Phi[y_0(x) + t \delta y(x)].$$

Так как функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на функции $y_0(x)$ локального экстремума, то у функции $\varphi(t)$ точка $t = 0$ является точкой локального экстремума. Следовательно, если производная $\varphi'(0)$ существует, то $\varphi'(0) = 0$. Существование производной $\varphi'(0)$ следует из существования вариации функционала $\Phi[y(x)]$ на $y_0(x)$

$$\frac{d}{dt} \varphi(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \Phi[y_0(x) + t \delta y(x)] \Big|_{t=0}.$$

Следовательно,

$$\delta \Phi[y_0(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt} \Phi[y_0(x) + t \delta y(x)] \Big|_{t=0} = 0$$

для любой $\delta y(x)$. Теорема 5.1.1 доказана. $\square$

2.19. Основная лемма вариаци исчисления.

Напомним, что $C^n[x_0, x_1]$, $n \in \mathbb{N}$ обозначает множество n раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[x_0, x_1]$ функций. Пусть $C_0^n[x_0, x_1]$ — множество функций $y(x) \in C^n[x_0, x_1]$ таких, что

$$y^{(m)}(x_0) = y^{(m)}(x_1) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Лемма 5.1.1. Пусть $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[x_0, x_1]$ функция такая, что

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)y(x)dx = 0$$

для любой $y(x) \in C_0^n[x_0, x_1]$. Тогда $f(x) \equiv 0$ на отрезке $[x_0, x_1]$.

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ отлична от нуля на отрезке $[x_0, x_1]$. Тогда существует точка $x_2 \in (x_0, x_1)$ такая, что $f(x_2) \neq 0$. Пусть для определенности $f(x_2) > 0$. В силу непрерывности $f(x)$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$f(x) \geq \frac{f(x_2)}{2} > 0, \quad \forall x \in [x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon] \subset (x_0, x_1).$$

Рассмотрим функцию $y_2(x)$ следующего вида (см. рис. 5.1):

$$y_2(x) = \begin{cases} (x - (x_2 - \varepsilon))^{n+1}((x_2 + \varepsilon) - x)^{n+1}, & x \in [x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon]; \\ 0, & x \notin [x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon]. \end{cases}$$

Функция $y_2(x) \in C_0^n[x_0, x_1]$ и $y_2(x) > 0$ при $x \in (x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon)$. Следовательно,

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)y_2(x)dx = \int_{x_2-\varepsilon}^{x_2+\varepsilon} f(x)y_2(x)dx > 0,$$

что противоречит условию леммы. Лемма 5.1.1 доказана. $\square$

Рассмотрим множество M непрерывно дифференцируемых на $[x_0, x_1]$ функций $y(x)$ таких, что $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$. Определим на этом множестве функционал

$$\Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx, \quad (5.1)$$

Теорема 5.2.1. Предположим, что при $x \in [x_0, x_1]$, $(y, p) \in \mathbb{R}^2$ функции $F(x, y, p)$ существуют непрерывные вторые частные производные. Если функционал (5.1) достигает локального экстремума на функции $y_0(x) \in M$, имеющей непрерывно вторую производную на отрезке $[x_0, x_1]$, то функция $y_0(x)$ является решением дифференциального уравнения

$$F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_p(x, y, y') = 0, \quad x_0 \leq x \leq x_1. \quad (5.2)$$

Доказательство. Найдем вариацию функционала (5.1) на $y_0(x)$. Из определения множества M следует, что допустимой вариацией $\delta y(x)$ функции $y_0(x)$ является любая непрерывно дифференцируемая на отрезке $[x_0, x_1]$ функция, обращающаяся в ноль на концах этого отрезка (см. рис. 5.2). То есть $\delta y(x) \in C_0^n[x_0, x_1]$.

Используя определение вариации функционала, получим

$$\begin{aligned} \delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] &= \frac{d}{dt} \Phi[y_0(x) + t\delta y(x)] \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_0(x) + t\delta y(x), y'_0(x) + t(\delta y)'(x))dx \Big|_{t=0} = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left\{ F_y(x, y_0(x) + t\delta y(x), y'_0(x) + t(\delta y)'(x))\delta y(x) + \right. \\ &\quad \left. + F_p(x, y_0(x) + t\delta y(x), y'_0(x) + t(\delta y)'(x))(\delta y)'(x) \right\} dx \Big|_{t=0} = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left\{ F_y(x, y_0(x), y'_0(x))\delta y(x) + F_p(x, y_0(x), y'_0(x))(\delta y)'(x) \right\} dx \end{aligned}$$

Из теоремы о необходимом условии экстремума следует, что вариация функционала на $y_0(x)$ должна равняться нулю, то есть

$$\int_{x_0}^{x_1} F_y(x, y_0(x), y'_0(x))\delta y(x)dx + \int_{x_0}^{x_1} F_p(x, y_0(x), y'_0(x))(\delta y)'(x)dx = 0.$$

Интегрируя по частям второй интеграл и учитывая то, что

$$\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0,$$

получим

$$\int_{x_0}^{x_1} \left\{ F_y(x, y_0(x), y'_0(x)) - \frac{d}{dx} F_p(x, y_0(x), y'_0(x)) \right\} \delta y(x)dx = 0.$$

Это равенство выполнено для любой функции $\delta y(x) \in C_0^n[x_0, x_1]$. Применяя основную лемму вариационного исчисления, имеем

$$F_y(x, y_0(x), y'_0(x)) - \frac{d}{dx} F_p(x, y_0(x), y'_0(x)) = 0, \quad x_0 \leq x \leq x_1.$$

Следовательно, функция $y_0(x)$ является решением уравнения (5.2) и теорема 5.2.1 доказана. $\square$

2.20. Необходимые условия экстремума произвольных функций.

Рассмотрим множество M функций $y(x) \in C^n[x_0, x_1]$ таких, что

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_{01}, \quad y''(x_0) = y_{02}, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}, \quad (5.6)$$

$$y(x_1) = y_{10}, \quad y'(x_1) = y_{11}, \quad y''(x_1) = y_{12}, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_1) = y_{1n-1}. \quad (5.7)$$

Определим на этом множестве функционал

$$\Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))dx, \quad (5.8)$$

где функция $F(x, y, p_1, \dots, p_n)$ определена и непрерывна при $x \in [x_0, x_1]$, $(y, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Получим необходимое условие экстремума функционала (5.8) на множестве M .
Теорема 5.3.1. Пусть функция $F(x, y, p_1, \dots, p_n)$ имеет при $x \in [x_0, x_1]$, $(y, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ непрерывные частные производные порядка $2n$. Если функция $\bar{y}(x) \in M$, $\bar{y}(x) \in C^{2n}[x_0, x_1]$, и на ней достигается экстремум функционала (5.8) на множестве M , то $\bar{y}(x)$ является решением уравнения

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{p_1} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{p_n} = 0, \quad x_0 \leq x \leq x_1, \quad (5.9)$$

зде $F = F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))$.

Доказательство. В силу необходимого условия экстремума вариации функционала (5.8) на функции $\bar{y}(x)$ должна обращаться в ноль для любой допустимой вариации $\delta y(x) \in C_0^{2n}[x_0, x_1]$.

По определению вариации функционала имеем

$$\begin{aligned} \delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)] &= \frac{d}{dt} \Phi[\bar{y}(x) + t\delta y(x)] \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} F(x, \bar{y}(x) + t\delta y(x), \bar{y}'(x) + t(\delta y)'(x), \dots, \bar{y}^{(n)}(x) + t(\delta y)^{(n)}(x))dx \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Дифференцируя интеграл по параметру t , полагая затем $t = 0$ и приравнивая вариацию к нулю, получим

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y \delta y(x) + F_{p_1} (\delta y)'(x) + \dots + F_{p_n} (\delta y)^{(n)}(x) \right) dx = 0.$$

Интегрируя по частям и учитывая то, что функция $\delta y(x)$ и ее производные обращаются в ноль на концах отрезка, имеем

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{p_1} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{p_n} \right) \delta y(x) dx = 0.$$

Так как это равенство выполнено для любой функции $\delta y(x) \in C_0^{2n}[x_0, x_1]$, то, применяя основную лемму вариационного исчисления, получим, что функция $\bar{y}(x)$ является решением дифференциального уравнения (5.9). Теорема 5.3.1 доказана. $\square$

2.21. Необходимые условия экстремума функций двух переменных.

$$\Phi[u(x, y)] = \iint_D F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y))dxdy, \quad (5.11)$$

где $F(x, y, u, p, q)$ — заданная функция, а D — область, ограниченная контуром L . Будем предполагать, что функция $F(x, y, u, p, q)$ имеет непрерывные вторые частные производные при $(x, y) \in \bar{D} = D \cup L$, $(u, p, q) \in \mathbb{R}^3$.

Пусть M — множество функций $u(x, y)$, имеющих в $\bar{D}$ непрерывные частные производные и принимающих на L заданные значения $u(x, y) = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in L$. Вариация функции $u(x, y)$, не выходящая ее из множества M , — это функция $\delta u(x, y)$, имеющая в $\bar{D}$ непрерывные частные производные и обращающаяся в ноль на L , то есть $\delta u(x, y) = 0$, $(x, y) \in L$ (см. рис. 5.3).

Лемма 5.3.1. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в $\bar{D}$. Если

$$\iint_D f(x, y)v(x, y)dxdy = 0$$

для любой функции $v(x, y)$, имеющей непрерывные частные производные в $\bar{D}$ и обращающейся в ноль на контуре L , то $f(x, y) = 0$, $(x, y) \in \bar{D}$.

Доказательство. Предположим, что функция $f(x, y)$ отлична от нуля в $\bar{D}$. Тогда существует точка $(x_0, y_0) \in D$ такая, что $f(x_0, y_0) \neq 0$. Пусть для определенности $f(x_0, y_0) > 0$. Из непрерывности $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) следует, что существует круг

$$S = \{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\}$$

такой, что $f(x, y) \geq \frac{f(x_0, y_0)}{2} > 0$ при $(x, y) \in S \subset \bar{D}$. Рассмотрим функцию $v_0(x, y)$ такую, что (см. рис. 5.4)

$$v_0(x, y) = \begin{cases} ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - \varepsilon^2)^2, & (x, y) \in S; \\ 0, & (x, y) \in \bar{D} \setminus S. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y)v_0(x, y)dxdy &= \iint_S f(x, y)v_0(x, y)dxdy \geq \\ &\geq \frac{f(x_0, y_0)}{2} \iint_S v_0(x, y)dxdy > 0, \end{aligned}$$

что противоречит условию леммы. Полученное противоречие показывает, что исходное предположение было неверно. Лемма 5.3.1 доказана. $\square$

Теорема 5.3.2. Предположим, что функция $F(x, y, u, p, q)$ имеет непрерывные вторые частные производные при $(x, y) \in \bar{D}$, $(u, p, q) \in \mathbb{R}^3$. Если экстремум функционала (5.11) достигается на функции $\bar{u}(x, y) \in M$, имеющей непрерывные вторые частные производные в $\bar{D}$, то эта функция является решением уравнения в частных производных:

$$F_u - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in D. \quad (5.12)$$

Доказательство. Пусть экстремум функционала (5.11) достигается на функции $\bar{u}(x, y) \in M$, имеющей непрерывные вторые частные производные в $\bar{D}$. Из необходимого условия экстремума следует, что вариация функционала (5.11) на этой функции равна нулю

$$\delta\Phi[\bar{u}(x, y), \delta u(x, y)] = \frac{d}{dt} \Phi[\bar{u}(x, y) + t\delta u(x, y)] \Big|_{t=0} = 0,$$

то есть

$$\frac{d}{dt} \iint_D F(x, y, \bar{u}(x, y) + t\delta u(x, y), \bar{u}_x(x, y) + t\delta u_x(x, y), \bar{u}_y(x, y) + t\delta u_y(x, y))dxdy \Big|_{t=0} = 0,$$

где $w(x, y, t) = \bar{u}(x, y) + t\delta u(x, y)$. Дифференцируя по t под знаком интеграла и полагая t равным нулю, получим

$$\begin{aligned} \iint_D F_u(x, y, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y) \delta u(x, y) dxdy + \\ + \iint_D \left\{ F_p(x, y, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y) (\delta u)_x(x, y) + \right. \\ \left. + F_q(x, y, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y) (\delta u)_y(x, y) \right\} dxdy = 0. \quad (5.13) \end{aligned}$$

Преобразуем это равенство. Очевидно, что

$$\begin{aligned} F_p(x, y, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y) (\delta u)_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (F_p \delta u) - \frac{\partial F_p}{\partial x} \delta u, \\ F_q(x, y, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y) (\delta u)_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (F_q \delta u) - \frac{\partial F_q}{\partial y} \delta u. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \iint_D \left\{ F_p(x, y, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y) (\delta u)_x(x, y) + F_q(x, y, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y) (\delta u)_y(x, y) \right\} dxdy = \\ = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (F_p \delta u) + \frac{\partial}{\partial y} (F_q \delta u) \right) dxdy - \iint_D \left(\frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial F_q}{\partial y} \right) \delta u dxdy. \end{aligned}$$

Применяя формулу Грина к интегралу

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (F_p \delta u) + \frac{\partial}{\partial y} (F_q \delta u) \right) dxdy$$

и учитывая то, что $\delta u(x, y) = 0$, $(x, y) \in L$, получим

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (F_p \delta u) + \frac{\partial}{\partial y} (F_q \delta u) \right) dxdy = \oint_L (F_p \delta u dy - F_q \delta u dx) = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \iint_D \left\{ F_p(x, y, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y) (\delta u)_x(x, y) + F_q(x, y, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y) (\delta u)_y(x, y) \right\} dxdy = \\ = - \iint_D \left(\frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial F_q}{\partial y} \right) \delta u dxdy, \end{aligned}$$

и равенство (5.13) принимает вид

$$\iint_D \left\{ F_u - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y} \right\} \delta u(x, y) dxdy = 0,$$

где F_u , F_p , F_q вычисляются в точке $(x, y, \bar{u}(x, y), \bar{u}_x(x, y), \bar{u}_y(x, y))$. Так как полученное равенство выполнено для любой допустимой вариации $\delta u(x, y)$, то, применяя лемму 5.3.1, получаем, что функция $\bar{u}(x, y)$ является решением уравнения (5.12). Теорема 5.3.2 доказана. $\square$

2.22. Задача на условный экстремум.

Рассмотрим два функционала

$$\Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (5.14)$$

и

$$\Psi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y(x), y'(x)) dx, \quad (5.15)$$

где $F(x, y, p)$, $G(x, y, p)$ – заданные дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов.

Рассмотрим следующую экстремальную задачу. Пусть требуется найти функцию $\tilde{y}(x)$, на которой достигается экстремум функционала (5.14) на множестве функций

$$M_\Phi = \{y(x) \in C^1[x_0, x_1] : y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, \Psi[y(x)] = \ell\}. \quad (5.16)$$

Таким образом, нам нужно найти экстремум функционала (5.14) на множестве функций определяемом тем условием, что функционал (5.15) принимает на этом множестве постоянное значение. Вариационные задачи такого типа называются задачами на *условный экстремум*.

Найдем вариацию функционала (5.15) на множестве функций

$$M = \{y(x) \in C^1[x_0, x_1] : y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}.$$

Пусть $\delta y(x)$ – допустимая вариация функции на M , то есть

$$\delta y(x) \in C^1[x_0, x_1], \quad \delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0.$$

Тогда вариация функционала $\Psi[y(x)]$ на функции $\tilde{y}(x) \in M$ равна

$$\delta \Psi[\tilde{y}(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt} \Psi[\tilde{y}(x) + t \delta y(x)] \Big|_{t=0}.$$

Дифференцируя по t и полагая $t = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \delta \Psi[\tilde{y}(x), \delta y(x)] &= \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left\{ G_y(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x)) \delta y(x) + G_p(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x)) (\delta y)'(x) \right\} dx. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Теорема 5.4.1. Пусть на функции $\tilde{y}(x) \in M_\Phi$, $\tilde{y}(x) \in C^2[x_0, x_1]$, достигается экстремум функционала (5.14) на множестве M_Φ . Если существует функция

$$\delta y_0(x) \in C^1[x_0, x_1], \quad \delta y_0(x_0) = \delta y_0(x_1) = 0$$

такая, что вариация $\delta \Psi[\tilde{y}(x), \delta y_0(x)] \neq 0$, то найдется число λ такое, что $\tilde{y}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$L_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} L_p(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad x_0 \leq x \leq x_1, \quad (5.18)$$

где

$$L(x, y, p) = F(x, y, p) + \lambda G(x, y, p). \quad (5.19)$$

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $\delta y(x)$ такую, что $\delta y(x) \in C^1[x_0, x_1]$, $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$. Рассмотрим функции

$$\varphi(t, \tau) = \Phi[\tilde{y}(x) + t \delta y(x) + \tau \delta y_0(x)],$$

$$\psi(t, \tau) = \Psi[\tilde{y}(x) + t \delta y(x) + \tau \delta y_0(x)],$$

где t, τ – произвольные действительные числа.

Из определения функций $\varphi(t, \tau)$ и $\psi(t, \tau)$ следует, что

$$\varphi(0, 0) = \Phi[\tilde{y}(x)], \quad \psi(0, 0) = \Psi[\tilde{y}(x)],$$

$$\begin{aligned} \varphi_t(0, 0) &= \delta \Phi[\tilde{y}(x), \delta y(x)], & \varphi_\tau(0, 0) &= \delta \Phi[\tilde{y}(x), \delta y_0(x)], \\ \psi_t(0, 0) &= \delta \Psi[\tilde{y}(x), \delta y(x)], & \psi_\tau(0, 0) &= \delta \Psi[\tilde{y}(x), \delta y_0(x)]. \end{aligned}$$

Покажем, что для любых $\delta y(x) \in C_0^1[x_0, x_1]$ якобиан

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(t, \tau)} \Big|_{t=\tau=0} = \det \begin{pmatrix} \delta \Phi[\tilde{y}(x), \delta y(x)], & \delta \Phi[\tilde{y}(x), \delta y_0(x)] \\ \delta \Psi[\tilde{y}(x), \delta y(x)], & \delta \Psi[\tilde{y}(x), \delta y_0(x)] \end{pmatrix} = 0. \quad (5.20)$$

Предположим, что это не так и существует $\delta \tilde{y}(x)$ такая, что для нее якобиан

$$\det \begin{pmatrix} \delta \Phi[\tilde{y}(x), \delta \tilde{y}(x)], & \delta \Phi[\tilde{y}(x), \delta y_0(x)] \\ \delta \Psi[\tilde{y}(x), \delta \tilde{y}(x)], & \delta \Psi[\tilde{y}(x), \delta y_0(x)] \end{pmatrix} \neq 0.$$

Тогда из теоремы о неявных функциях следует, что при $\delta y(x) = \delta \tilde{y}(x)$ система

$$\varphi(t, \tau) = u, \quad \psi(t, \tau) = v$$

однозначно разрешима для (u, v) , находящихся в достаточно малой окрестности (u_0, v_0) , где $u_0 = \varphi(0, 0)$, $v_0 = \psi(0, 0)$.

Пусть, для определенности, $\tilde{y}(x)$ – функция, на которой достигается локальный минимум задачи на условный экстремум. Рассмотрим систему

$$\varphi(t, \tau) = \varphi(0, 0) - \varepsilon = \Phi[\tilde{y}(x)] - \varepsilon,$$

$$\psi(t, \tau) = \psi(0, 0) = \Psi[\tilde{y}(x)] = \ell,$$

где ε – достаточно малое положительное число. Так как

$$(\varphi(0, 0) - \varepsilon, \psi(0, 0))$$

находится в достаточно малой окрестности точки (u_0, v_0) , то по теореме о неявной функции система имеет единственное решение $t_\varepsilon, \tau_\varepsilon$. Это означает, что

$$\varphi(t_\varepsilon, \tau_\varepsilon) = \Phi[\tilde{y}(x) + t_\varepsilon \delta \tilde{y}(x) + \tau_\varepsilon \delta y_0(x)] = \Phi[\tilde{y}(x)] - \varepsilon,$$

$$\psi(t_\varepsilon, \tau_\varepsilon) = \Psi[\tilde{y}(x) + t_\varepsilon \delta \tilde{y}(x) + \tau_\varepsilon \delta y_0(x)] = \ell.$$

Следовательно, на функции $\tilde{y}(x) + t_\varepsilon \delta \tilde{y}(x) + \tau_\varepsilon \delta y_0(x)$, принадлежащей множеству M_Φ , функционал (5.14) принимает значение меньше, чем на $\tilde{y}(x)$. Это противоречит тому, что на функции $\tilde{y}(x)$ достигается локальный минимум. Из полученного противоречия следует справедливость равенства (5.20).

Раскрывая определитель, входящий в равенство (5.20), получаем

$$\delta \Phi[\tilde{y}(x), \delta y(x)] \delta \Psi[\tilde{y}(x), \delta y_0(x)] - \delta \Phi[\tilde{y}(x), \delta y_0(x)] \delta \Psi[\tilde{y}(x), \delta y(x)] = 0$$

2.23. Вариационное св-во собствен значений.

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля. Требуется найти значения λ , при которых краевая задача

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y = -\lambda y, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5.21)$$

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \quad (5.22)$$

имеет ненулевое решение. Эти значения λ_n называются собственными значениями, а соответствующие им решения $y_n(x)$ – собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля. Собственные функции определены с точностью до произвольного постоянного множителя. Чтобы устранить эту неоднозначность, введем следующее условие:

$$\int_0^l (y_n(x))^2 dx = 1. \quad (5.23)$$

Рассмотрим функционал

$$\Phi[y(x)] = \int_0^l (k(x)(y'(x))^2 + q(x)(y(x))^2) dx. \quad (5.24)$$

Покажем, что, если $y_n(x)$ – собственная функция задачи Штурма-Лиувилля (5.21), (5.22), соответствующая собственному значению λ_n , то

$$\Phi[y_n(x)] = \lambda_n. \quad (5.25)$$

Действительно, так как

$$\begin{aligned} \int_0^l k(x)(y_n'(x))^2 dx &= \int_0^l k(x)y_n'(x)y_n'(x) dx = \\ &= k(x)y_n'(x)y_n(x) \Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l (k(x)y_n'(x))' y_n(x) dx = - \int_0^l (k(x)y_n'(x))' y_n(x) dx. \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \Phi[y_n(x)] &= \int_0^l (k(x)(y_n'(x))^2 + q(x)(y_n(x))^2) dx = \\ &= - \int_0^l ((k(x)y_n'(x))' - q(x)y_n(x)) y_n(x) dx = \lambda_n \int_0^l (y_n(x))^2 dx = \lambda_n. \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу минимизации функционала (5.24) на множестве функций, удовлетворяющих условиям (5.22) и (5.23). Напишем условие (5.23) в виде

$$\Psi[y(x)] = 1, \quad \Psi[y(x)] = \int_0^l (y(x))^2 dx.$$

Пусть минимум достигается на функции $\tilde{y}(x) \in C^2[0, l]$. Из необходимого условия для решения задачи на условный экстремум получим, что $\tilde{y}(x)$ является решением уравнения

$$L_y - \frac{d}{dx} L_p = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5.26)$$

где $L(x, y, p) = k(x)p^2 + q(x)y^2 - \lambda y^2$. Перепишем уравнение (5.26), учитывая вид функции $L(x, y, p)$:

$$2q(x)y(x) - 2\lambda y(x) - 2(k(x)y'(x))' = 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Таким образом, функция $\tilde{y}(x)$ является решением уравнения (5.21) и удовлетворяет условиям (5.22). Кроме того, она не равна тождественно нулю, поскольку удовлетворяет условию (5.23). Следовательно, $\tilde{y}(x)$ является собственной функцией задачи Штурма-Лиувилля (5.21), (5.22). Обозначим ее $y_1(x)$, λ_1 – соответствующее ей собственное значение. Из (5.25) следует, что $\Phi[y_1(x)] = \lambda_1$.

Таким образом, мы показали, что решение задачи на условный экстремум (5.24), (5.23) является собственной функцией задачи Штурма-Лиувилля, а соответствующее собственное значение представляет собой величину функционала (5.24) на этой собственной функции.

для всех $\delta y(x) \in C_0^1[x_0, x_1]$. По условию теоремы $\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \neq 0$. Поделив на $\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)]$ и обозначив через

$$\lambda = -\frac{\delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)]}{\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)]},$$

получим

$$\delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)] + \lambda\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y(x)] = 0.$$

Учитывая формулы для $\delta\Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)]$ и $\delta\Psi[\bar{y}(x), \delta y(x)]$, это равенство можно переписать так:

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} \left\{ F_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) + \lambda G_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \right\} \delta y(x) dx + \\ & + \int_{x_0}^{x_1} \left\{ F_p(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) + \lambda G_p(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \right\} \delta y'(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям второй интеграл и учитывая определение (5.19) функции $L(x, y, p)$, имеем

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} \left\{ L_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) - \frac{d}{dx} L_p(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \right\} \delta y(x) dx = 0, \\ & \forall \delta y(x) \in C_0^1[x_0, x_1]. \end{aligned}$$

Применяя основную лемму вариационного исчисления, получим, что функция $\bar{y}(x)$ удовлетворяет уравнению (5.18). Теорема 5.4.1 доказана. $\square$